ew/

ISSN 2075-9827

К М П

Карпатські математичні публікації

CARPATHIAN MATHEMATICAL PUBLICATIONS

КАРПАТСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ

Том 1

№ 2

2009

Карпатські математичні публікації
Науковий журнал

Друкується за рішенням Вченої ради
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Редакційна колегія

Головний редактор
Загороднюк А.В.

Заступники головного редактора
Артемович О.Д., Лопушанський О.В.

Відповідальний секретар
Шарин С.В.

Берінде В., Бобрик Р.В.,
Боднар Д.І., Василишин Б.В.,
Винницький Б.В., Дрозд Ю.А.,
Зарічний М.М., Заторський Р.А.,
Івашкович С.М., Казмерчук А.І.,
Кириченко В.В., Климишин І.А.,
Копитко Б.І., Малицька Г.П.,
Маслюченко В.К., Никифорчин О.Р.,
Осипчук М.М., Петравчук А.П.,
Петришин Л.Б., Пилипів В.М.,
Плічко А.М., Самойленко Ю.С.,
Скасків О.Б., Соломко А.В.,
Сторож О.Г., Сущанський В.І.,
Філевич П.В., Шарко В.В.

Адреса редакції: Факультет математики та інформатики
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
вул. Шевченка, 57
76025, Івано-Франківськ
Тел.: (0342) 59-60-50
e-mail: cmp@pu.if.ua
Адреса в інтернеті: http://www.pu.if.ua/cmp

© Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника, 2009

Карпатські математичні публікації

Науковий журнал
Т.1, №2
2009

Зміст

Carpathian mathematical publications

SCIENTIFIC JOURNAL
V.1, №2
2009

CONTENTS

Карпатские математические публикации

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Т.1, №2
2009

СОДЕРЖАНИЕ

Карпатські математичні
публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical
Publications. V.1, No.2

УДК 512+515.12

Banakh T.O., Gavrylkiv V.M.

EXTENDING BINARY OPERATIONS TO FUNTOR-SPACES

Banakh T.O., Gavrylkiv V.M. *Extending binary operations to funtor-spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 114–127.

Given a continuous monadic functor T : **Comp** → **Comp** in the category of compacta and a discrete topological semigroup X we extend the semigroup operation $\varphi : X \times X \to X$ to a right-topological semigroup operation $\Phi : T\beta X \times T\beta X \to T\beta X$, whose topological center Λ_Φ contains the dense subsemigroup $T_f X$ consisting of elements $a \in T\beta X$ that have finite support in X.

Introduction

One of powerful tools in the modern Combinatorics of Numbers is the method of ultrafilters based on the fact that each binary operation $\varphi : X \times X \to X$ defined on a discrete topological space X can be extended to a right-topological operation $\Phi : \beta X \times \beta X \to \beta X$ on the Stone-Čech compactification βX of X, see [13], [16]. The extension of φ is constructed in two step. First, for every $x \in X$ extend the left shift $\varphi_x : X \to X$, $\varphi_x : y \mapsto \varphi(x, y)$, to a continuous map $\overline{\varphi}_x : \beta X \to \beta X$. Next, for every $b \in \beta X$ extend the right shift $\bar{\varphi}^b : X \to \beta X$, $\bar{\varphi}^b : x \mapsto \bar{\varphi}_x(b)$, to a continuous map $\Phi^b : \beta X \to \beta X$ and put $\Phi(a, b) = \Phi^b(a)$ for every $a \in \beta X$. The Stone-Čech extension βX is the space of ultrafilters on X. In [11] it was observed that the binary operation φ extends not only to βX but also to the superextension λX of X and to the space GX of all inclusion hyperspaces on X. If X is a semigroup, then GX is a compact Hausdorff right-topological semigroup containing λX and βX as closed subsemigroups.

In this note we show that an (associative) binary operation $\varphi : X \times X \to X$ on a discrete topological space X can be extended to an (associative) right-topological operation $\Phi : T\beta X \times T\beta X \to T\beta X$ for any monadic functor T in the category **Comp** of compact Hausdorff spaces. So, for the functors β, λ or G we get the extensions of the operation φ discussed above.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30; 18B40; 20N02; 20M50; 22A22; 54B30; 54H10.
Key words and phrases: functor, monad, algebra, binary operation, semigroup, right-topological semigroup, topological center.

© Banakh T.O., Gavrylkiv V.M., 2009

1 Monadic functors and their algebras

Let us recall [14, VI], [17, §1.2] that a functor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ in a category $\mathcal{C}$ is called *monadic* if there are natural transformations $\eta : \mathrm{Id} \to T$ and $\mu : T^2 \to T$ making the following diagrams

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[d, "T\eta"'] \arrow[dr, "1_T"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "\mu T"] \arrow[d, "T\mu"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

commutative. In this case the triple $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ is called a *monad*, the natural transformations $\eta : \mathrm{Id} \to T$ and $\mu : T^2 \to T$ are called the *unit* and *multiplication* of the monad $\mathbb{T}$, and the functor T is the *functorial part* of the monad $\mathbb{T}$.

A pair (X, ξ) consisting of an object X and a morphism $\xi : TX \to X$ of the category $\mathcal{C}$ is called a $\mathbb{T}$-*algebra*, if $\xi \circ \eta_X = \mathrm{id}_X$ and the square

$$\begin{tikzcd} T^2X \arrow[r, "T\xi"] \arrow[d, "\mu"'] & TX \arrow[d, "\xi"] \\ TX \arrow[r, "\xi"'] & X \end{tikzcd}$$

is commutative. For every object X of the category $\mathcal{C}$ the pair (TX, μ) is a $\mathbb{T}$-algebra called the *free* $\mathbb{T}$-*algebra over* X.

For two $\mathbb{T}$-algebras (X, ξ_X) and (Y, ξ_Y) a morphism $h : X \to Y$ is called a *morphism of* $\mathbb{T}$-*algebras*, if the following diagram

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "Th"] \arrow[d, "\xi_X"'] & TY \arrow[d, "\xi_Y"] \\ X \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

is commutative. The naturality of the multiplication $\mu : T^2 \to T$ of the monad $\mathbb{T}$ implies that for any morphism $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ the morphism $Tf : TX \to TY$ is a morphism of free $\mathbb{T}$-algebras.

Each morphism $h : TX \to Y$ from the free $\mathbb{T}$-algebra into a $\mathbb{T}$-algebra (Y, ξ) is uniquely determined by the composition $h \circ \eta$.

Lemma 1.1. *If $h : TX \to Y$ is a morphism of a free $\mathbb{T}$-algebra TX into a $\mathbb{T}$-algebra (Y, ξ), then $h = \mu \circ T(h \circ \eta) = \mu \circ Th \circ T\eta$.*

Proof. Consider the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta"'] & TX \arrow[r, "h"] \arrow[d, shift right, "\mu"'] & Y \\ TX \arrow[r, shift left, "T\eta"] \arrow[rr, bend right, "T(h\circ\eta)"'] & T^2X \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[u, shift right, "\eta_T"'] \arrow[r, "Th"] & TY \arrow[u, "\xi"'] \end{tikzcd}$$

and observe that

$$h = h \circ \mu \circ \eta_T = \xi \circ Th \circ \eta_T = \xi \circ Th \circ T\eta \circ \mu \circ \eta_T = \xi \circ T(h \circ \eta).$$

□

By a *topological category* we shall understand a subcategory of the category **Top** of topological spaces and their continuous maps such that:

- for any objects X, Y of the category $\mathcal{C}$ each constant map $f : X \to Y$ is a morphism of $\mathcal{C}$;
- for any objects X, Y of the category $\mathcal{C}$ the product $X \times Y$ is an object of $\mathcal{C}$, and for any object Z of $\mathcal{C}$ and morphisms $f_X : Z \to X$, $f_Y : Z \to Y$ the map $(f_X, f_Y) : Z \to X \times Y$ is a morphism of the category $\mathcal{C}$.

A discrete topological space X is called *discrete in $\mathcal{C}$*, if X is an object of $\mathcal{C}$ and each function $f : X \to Y$ into an object Y of the category $\mathcal{C}$ is a morphism of $\mathcal{C}$. It is clear that any bijection $f : X \to Y$ between discrete objects of the category $\mathcal{C}$ is an isomorphism in $\mathcal{C}$.

From now on we shall assume that $(\mathbb{T}, \eta, \mu)$ is a monad in a topological category $\mathcal{C}$ such that for any discrete objects X, Y in $\mathcal{C}$ the product $X \times Y$ is discrete in $\mathcal{C}$.

2 Binary operations and their $\mathbb{T}$-extensions

By a *binary operation in the category $\mathcal{C}$* we understand any function $\varphi : X \times Y \to Z$, where X, Y, Z are objects of the category $\mathcal{C}$. For any $a \in X$ and $b \in Y$ the functions

$$\varphi_a : Y \to Z, \quad \varphi_a : y \mapsto \varphi(a, y)$$

and

$$\varphi^b : X \to Z, \quad \varphi^b : x \mapsto \varphi(x, b),$$

are called the *left* and *right shifts*, respectively.

A binary operation $\varphi : X \times Y \to Z$ is called *right-topological*, if for every $y \in Y$ the right shift $\varphi^y : X \to Z$, $\varphi^y : x \mapsto \varphi(x, y)$, is continuous. The *topological center* of a right-topological binary operation $\varphi : X \times Y \to Z$ is the set Λ_φ of all elements $x \in X$ such that the left shift $\varphi_x : Y \to Z$ is continuous.

Definition 2.1. *Let $\varphi : X \times Y \to Z$ be a binary operation in the category $\mathcal{C}$. A binary operation $\Phi : TX \times TY \to TZ$ is defined to be a $\mathbb{T}$-extension of φ if:*

1. *$\Phi(\eta_X(x), \eta_Y(y)) = \eta_Z(\varphi(x, y))$ for any $x \in X$ and $y \in Y$;*
2. *for every $b \in TY$ the right shift $\Phi^b : TX \to TZ$, $\Phi^b : x \mapsto \Phi(x, b)$, is a morphism of the free $\mathbb{T}$-algebras TY, TZ;*
3. *for every $x \in X$ the left shift $\Phi_{\eta(x)} : TY \to TZ$, $\Phi_{\eta(x)} : y \mapsto \Phi(\eta(x), y)$, is a morphism of the free $\mathbb{T}$-algebras TX, TZ.*

This definition implies that for any binary operation $\varphi : X \times Y \to Z$ its $\mathbb{T}$-extension $\Phi : TX \times TY \to TZ$ is a right-topological binary operation, whose topological center Λ_Φ contains the set $\eta(X) \subset TX$.

Theorem 1. *Let $\varphi : X \times Y \to Z$ be a binary operation in the category $\mathcal{C}$.*

1. *The binary operation φ has at most one $\mathbb{T}$-extension $\Phi : TX \times TY \to TZ$.*
2. *If X, Y are discrete in $\mathcal{C}$, then φ has a unique $\mathbb{T}$-extension $\Phi : TX \times TY \to TZ$.*

Proof. 1. Let $\Phi, \Psi : TX \times TY \to TZ$ be two $\mathbb{T}$-extensions of the operation φ. By the condition (3) of Definition 2.1, for every $x \in X$ and $a = \eta_X(x) \in TX$ the left shifts $\Phi_a, \Psi_a : TY \to TZ$ are morphisms of the free $\mathbb{T}$-algebras.

By the condition (1) of Definition 2.1,

$$\Phi_a \circ \eta_Y = \eta_Z \circ \varphi_x = \Psi_a \circ \eta_Y.$$

Then Lemma 1.1 implies that

$$\Phi_a = \mu \circ T(\Phi_a \circ \eta_X) = \mu \circ T(\eta_Z \circ \varphi_x) = \mu \circ T(\Psi_a \circ \eta_X) = \Psi_a.$$

The equality $\Phi = \Psi$ will follow as soon as we check that $\Phi^b = \Psi^b$ for every $b \in TY$. Since $\Phi^b, \Psi^b : TX \to TZ$ are morphisms of the free $\mathbb{T}$-algebras TX and TZ, the equality $\Phi^b = \Psi^b$ follows from the equality

$$\Phi^b \circ \eta(x) = \Phi_{\eta(x)}(b) = \Psi_{\eta(x)}(b) = \Psi^b \circ \eta(x), \quad x \in X,$$

according to Lemma 1.1.

2. Now assuming that the spaces X, Y are discrete in $\mathcal{C}$, we show that the binary operation $\varphi : X \times Y \to Z$ has a $\mathbb{T}$-extension. For every $x \in X$ consider the left shift $\varphi_x : Y \to Z$. Since Y is discrete in $\mathcal{C}$, the function φ_x is a morphism of the category $\mathcal{C}$. Applying the functor T to this morphism, we get a morphism $T\varphi_x : TY \to TZ$. Now for every $b \in TY$ consider the function $\varphi^b : X \to TZ$, $\varphi^b : x \mapsto T\varphi_x(b)$. Since the object X is discrete, the function φ^b is a morphism of the category $\mathcal{C}$. Applying to this morphism the functor T, we get a morphism $T\varphi^b : TX \to T^2Z$. Composing this morphism with the multiplication $\mu : T^2Z \to TZ$ of the monad $\mathbb{T}$, we get the function $\Phi^b = \mu \circ T\varphi^b : TZ \to TZ$. Define a binary operation $\Phi : TX \times TY \to TZ$, letting $\Phi(a, b) = \Phi^b(a)$ for $a \in TX$.

Claim 2.1. *$\Phi(\eta(x), b) = T\varphi_x(b)$ for every $x \in X$ and $b \in TY$.*

Proof. The commutativity of the diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi^b"] \arrow[d, "\eta"'] & TZ \arrow[d, "\eta"'] \\ TX \arrow[ur, "\Phi^b"] \arrow[r, "T\varphi^b"'] & T^2Z \arrow[u, bend right, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

implies the desired equality

$$\Phi(\eta(x), b) = \mu \circ T\varphi^b(\eta(x)) = \varphi^b(x) = T\varphi_x(b).$$

□

Now we shall prove that Φ is a $\mathbb{T}$-extension of φ.

i) For every $x \in X$ and $y \in Y$ we need to prove the equality

$$\Phi(\eta_X(x), \eta_Y(y)) = \eta_Z \circ \varphi(x, y).$$

By Claim 2.1,

$$\Phi(\eta_X(x), \eta_Y(y)) = T\varphi_x \circ \eta_Y(y) = \eta_Z \circ \varphi_x(y) = \eta_Z \circ \varphi(x, y).$$

The latter equality follows from the naturality of the transformation $\eta : \mathrm{Id} \to T$.

ii) The definition of Φ implies that for every $b \in TY$ the right shift $\Phi^b = \mu_Z \circ T\varphi^b$ is a morphism of free $\mathbb{T}$-algebras, being the composition of two morphisms $T\varphi^b : TX \to T^2Z$ and $\mu_Z : T^2Z \to TZ$ of free $\mathbb{T}$-algebras.

iii) Claim 2.1 guarantees that for every $x \in X$ the left shift $\Phi_{\eta(x)} = T\varphi_x : TY \to TZ$ is a morphism of the free $\mathbb{T}$-algebras. $\square$

Proposition 2.1. *Let $\varphi : X \times Y \to Z$, $\psi : X' \times Y' \to Z'$ be two binary operations in $\mathcal{C}$, $\Phi : TX \times TY \to TZ$, $\Psi : TX' \times TY' \to TZ'$ be their $\mathbb{T}$-extensions, and $h_X : X \to X'$, $h_Y : Y \to Y'$, $h_Z : Z \to Z'$ be morphisms in $\mathcal{C}$. If $\psi(h_X \times h_Y) = h_Z \circ \varphi$, then $T\Psi(Th_X \times Th_Y) = Th_Z \circ \Phi$.*

Proof. Observe that for any $x \in X$ and $x' = h_X(x)$ the commutativity of the diagrams

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "h_Y"'] & Z \arrow[d, "h_Z"] \\ Y' \arrow[r, "\psi_{x'}"'] & Z' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TY \arrow[r, "T\varphi_x"] \arrow[d, "Th_Y"'] & TZ \arrow[d, "Th_Z"] \\ TY' \arrow[r, "T\psi_{x'}"'] & TZ' \end{tikzcd}$$

implies that $Th_Z \circ T\varphi_x(b) = T\psi_{x'}(b')$ for every $b \in TY$ and $b' = Th_Y(b) \in TY'$.

It follows from Lemma 2.1 that $\Phi_{\eta(x)} = T\varphi_x : TY \to TZ$ and $\Psi_{\eta(x')} = T\psi_{x'} : TY' \to TZ'$. Consequently,

$$Th_Z \circ \Phi^b(\eta(x)) = Th_Z \circ \Phi_{\eta(x)}(b) = Th_Z \circ T\varphi_x(b) = T\psi_{x'}(b') = \Psi_{\eta(x')}(b') = \Psi^{b'}(\eta(x'))$$

and hence

$$Th_Z \circ \Phi^b \circ \eta = \Psi^{b'} \circ \eta \circ h_X.$$

Applying the functor T to this equality, we get

$$T^2h_Z \circ T(\Phi^b \circ \eta) = T(\Psi^{b'} \circ \eta) \circ Th_X.$$

Since $\Phi^b : TX \to TZ$ and $\Psi^{b'} : TX' \to TZ'$ are homomorphisms of the free $\mathbb{T}$-algebras, we can apply Lemma 1.1 and conclude that $\Phi^b = \mu \circ T(\Phi^b \circ \eta)$, and hence

$$Th_Z \circ \Phi^b = Th_Z \circ \mu_Z \circ T(\Phi^b \circ \eta) = \mu_{Z'} \circ T^2h_Z \circ T(\Phi^b \circ \eta) = \mu_{Z'} \circ T(\Psi^{b'} \circ \eta) \circ Th_X = \Psi^{b'} \circ Th_X.$$

Then for every $a \in TX$ we get

$$Th_Z \circ \Phi(a, b) = Th_Z \circ \Phi^b(a) = \Psi^{b'} \circ Th_X(a) = \Psi(Th_X(a), Th_Y(b)).$$

$\square$

3 BINARY OPERATIONS AND TENSOR PRODUCTS

In this section we shall discuss the relation of $\mathbb{T}$-extensions to tensor products. The tensor product is a function $\otimes : TX \times TY \to T(X \times Y)$ defined for any objects $X, Y \in \mathcal{C}$ such that X is discrete in $\mathcal{C}$.

For every $x \in X$ consider the embedding $i_x : Y \to X \times Y$, $i_x : y \mapsto (x, y)$. The embedding i_x is a morphism of the category $\mathcal{C}$, because the constant map $c_x : Y \to \{x\} \subset X$ and the identity map $\mathrm{id} : Y \to Y$ are morphisms of the category and $\mathcal{C}$ contains products of its objects. Applying the functor T to the morphism i_x, we get a morphism $Ti_x : TY \to T(X \times Y)$ of the category $\mathcal{C}$. Next, for every $b \in TY$ consider the function $Ti^b : X \to T(X \times Y)$, $Ti^b : x \mapsto Ti_x(b)$. Since X is discrete in $\mathcal{C}$, the function Ti^b is a morphism of the category $\mathcal{C}$. Applying the functor T to this morphism, we get a morphism $TTi^b : TX \to T^2(X \times Y)$. Composing this morphism with the multiplication $\mu : T^2(X \times Y) \to T(X \times Y)$ of the monad $\mathbb{T}$, we get the morphism $\otimes^b = \mu \circ TTi^b : TX \to T(X \times Y)$. Finally, define the tensor product $\otimes : TX \times TY \to T(X \times Y)$, letting $a \otimes b = \otimes^b(a)$ for $a \in TX$.

The following proposition describes some basic properties of the tensor product. For monadic functors in the category **Comp** of compact Hausdorff spaces those properties were established in [17, 3.4.2].

Proposition 3.1. *1. The diagram $\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\eta \times \eta"'] \arrow[rr, bend left, "\eta"] & TX \times TY \arrow[r, "\otimes"'] & T(X \times Y) \end{tikzcd}$ is commutative for any discrete object X and any object Y of $\mathcal{C}$;*

2. the tensor product is natural in the sense that for any morphisms $h_X : X \to X'$, $h_Y : Y \to Y'$ of $\mathcal{C}$ with discrete X, Y the following diagram

$$\begin{tikzcd} TX \times TY \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "Th_X \times Th_Y"'] & T(X \times Y) \arrow[d, "T(h_X \times h_Y)"] \\ TX' \times TY' \arrow[r, "\otimes"] & T(X' \times Y') \end{tikzcd}$$

is commutative;

3. the tensor product is associative in the sense that for any discrete objects X, Y, Z of $\mathcal{C}$ the diagram

$$\begin{tikzcd} TX \times TY \times TZ \arrow[r, "\otimes \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \otimes"'] & T(X \times Y) \times TZ \arrow[d, "\otimes"] \\ TX \times T(Y \times Z) \arrow[r, "\otimes"'] & T(X \times Y \times Z) \end{tikzcd}$$

is commutative, which means that $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ for any $a \in TX$, $b \in TY$, $c \in TZ$.

Proof. 1. Fix any $y \in Y$ and consider the element $b = \eta_Y(y) \in TY$. The definition of the right shift $\otimes^b$ implies that the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Ti^b"] \arrow[d, "\eta"'] & T(X\times Y) \\ TX \arrow[ur, "\otimes^b"] \arrow[r, "TTi^b"'] & T^2(X\times Y) \arrow[u, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

Consequently, for every $x \in X$ we get

$$\eta(x)\otimes\eta(y) = \otimes^b \circ \eta(x) = Ti^b \circ \eta(x) = Ti_x(\eta(y)) = \eta(i_x(y)) = \eta(x,y).$$

The latter equality follows from the diagram

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i_x"] \arrow[d, "\eta"'] & X\times Y \arrow[d, "\eta"] \\ TY \arrow[r, "Ti_x"'] & T(X\times Y) \end{tikzcd},$$

whose commutativity follows from the naturality of the transformation $\eta : \mathrm{Id} \to T$.

2. Let $h_X : X \to X'$ and $h_Y : Y \to Y'$ be any functions between discrete objects of the category $\mathcal{C}$. Let $Z = X \times Y$, $Z' = X' \times Y'$ and $h_Z = h_X \times h_Y : Z \to Z'$. Given any point $b \in TY$, consider the element $b' = Th_Y(b) \in TY'$. The statement (2) will follow as soon as we check that $Th_Z \circ \otimes^b = \otimes^{b'} \circ Th_X$. By Lemma 1.1, this equality will follow as soon as we check that $Th_Z \circ \otimes^b \circ \eta_X = \otimes^{b'} \circ Th_X \circ \eta_X = \otimes^{b'} \circ \eta_{X'} \circ h_X$. The last equality follows from the naturality of the transformation $\eta : \mathrm{Id} \to T$. As we know from the proof of the preceding item, $\otimes^{b'} \circ \eta_{X'}(x') = Ti_{x'}(b')$ for any $x' \in X'$. For every $x \in X$ and $x' = h_X(x)$ we can apply the functor T to the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i_x"] \arrow[d, "h_Y"'] & Z \arrow[d, "h_Z"] \\ Y' \arrow[r, "i_{x'}"'] & Z' \end{tikzcd}$$

and obtain the equality $Th_Z \circ Ti_x = Ti_{x'} \circ Th_Y$, which implies the desired equality:

$$\otimes^{b'} \circ \eta_{X'} \circ h_X(x) = \otimes^{b'} \circ \eta_{X'}(x') = Ti_{x'}(b') = Th_Z \circ Ti_x(b) = Th_Z \circ \otimes^b \circ \eta(x).$$

3. The proof of the associativity of the tensor product can be obtained by literal rewriting the proof of Proposition 3.4.2(4) of [17]. □

Theorem 2. *Let $\varphi : X\times Y \to Z$ be a binary operation in the category $\mathcal{C}$ and $\Phi : TX\times TY \to TZ$ be its $\mathbb{T}$-extension. If X is a discrete object in $\mathcal{C}$, then $\Phi(a,b) = T\varphi(a\otimes b)$ for any elements $a \in TX$ and $b \in TY$.*

Proof. Our assumptions on the category $\mathcal{C}$ guarantee that the product $X \times Y$ is a discrete object of $\mathcal{C}$ and hence $\varphi : X \times Y \to Z$ is a morphism of the category $\mathcal{C}$. So, it is legal to consider the morphism $T\varphi : T(X \times Y) \to TZ$. We claim that the binary operation

$$\Psi : TX \times TY \to TZ, \quad \Psi(a,b) = T\varphi(a\otimes b),$$

is a $\mathbb{T}$-extension of φ.

1. The first item of Definition 2.1 follows Proposition 3.1(1) and the naturality of the transformation $\eta : \mathrm{Id} \to T$:

$$\Psi(\eta_X(x), \eta_Y(y)) = T\varphi(\eta_X(x)\otimes\eta_Y(y)) = T\varphi \circ \eta_{X\times Y}(x,y) = \eta_Z \circ \varphi(x,y).$$

2. For every $b \in TY$ the morphism

$$\Psi^b = T\varphi \circ \otimes^b = T\varphi \circ \mu \circ TTi^b$$

is a morphism of the free $\mathbb{T}$-algebras TX and TZ.

3. For every $x \in X$ we see that

$$\Psi_{\eta(x)}(b) = T\varphi(\otimes^b(\eta(x))) = T\varphi \circ \mu \circ TTi^b \circ \eta(x) = T\varphi \circ \mu \circ \eta \circ Ti^b(x) = T\varphi \circ Ti^b(x)$$

is a morphism of the free $\mathbb{T}$-algebras TY and TZ.

Thus Ψ is a $\mathbb{T}$-extension of the binary operation φ. By the Uniqueness Theorem 1(1), Ψ coincides with Φ and hence $\Phi(a,b) = \Psi(a,b) = T\varphi(a\otimes b)$. □

4 The topological center of $\mathbb{T}$-extended operation

Definition 2.1 guarantees that for a binary operation $\varphi : X \times Y \to Z$ in $\mathcal{C}$ any $\mathbb{T}$-extension $\Phi : TX \times TY \to TZ$ of φ is a right-topological operation, whose topological center Λ_φ contains the subset $\eta_X(X)$. In this section we shall find conditions on the functor T and the space X guaranteeing that the topological center Λ_Φ is dense in TX.

We shall say that the functor T is *continuous*, if for each compact Hausdorff space K, that belongs to the category $\mathcal{C}$, and any object Z of $\mathcal{C}$ the map $T : \mathrm{Mor}(K,Z) \to \mathrm{Mor}(TK,TZ)$, $T : f \mapsto Tf$, is continuous with respect to the compact-open topology on the spaces of morphisms (which are continuous maps).

Theorem 3. *Let $\varphi : X \times Y \to Z$ be a binary operation in $\mathcal{C}$ and $\Phi : X \times Y \to Z$ be its $\mathbb{T}$-extension. If the object X is finite and discrete in $\mathcal{C}$, TX is locally compact and Hausdorff, and the functor T is continuous, then the operation Φ is continuous.*

Proof. Since the space X is discrete, the condition (2) of Definition 2.1 implies that the map $\Phi_\eta : X \times TY \to TZ$, $\Phi_\eta : (x,b) \mapsto \Phi(\eta(x),b)$, is continuous. Since X is finite, the induced map

$$\Phi_\eta^{(\cdot)} : TY \to \mathrm{Mor}(X,TZ), \quad \Phi_\eta^{(\cdot)} : b \mapsto \Phi_\eta^b,$$

where $\Phi_\eta^b : x \mapsto \Phi(\eta(x),b)$, is continuous. By the continuity of the functor T, the map $T : \mathrm{Mor}(X,TZ) \to \mathrm{Mor}(TX,T^2Z)$, $T : f \mapsto Tf$, is continuous and so is the composition $T \circ \Phi_\eta^{(\cdot)} : TY \to \mathrm{Mor}(TX,T^2Z)$. Since TX is locally compact and Hausdorff, we can apply [9, 3.4.8] and conclude that the map

$$T\Phi_\eta^{(\cdot)} : TX \times TY \to T^2Z, \quad T\Phi_\eta^{(\cdot)} : (a,b) \mapsto T\Phi_\eta^b(a),$$

is continuous and so is the composition $\Psi = \mu \circ T\Phi_\eta^{(\cdot)} : TX \times TY \to TZ$. Using the Uniqueness Theorem 1(1), we can prove that $\Psi = \Phi$ and hence the binary operation Φ is continuous. $\square$

Let X be an object of the category $\mathcal{C}$. We say that an element $a \in FX$ has *discrete (finite) support*, if there is a morphism $f : D \to X$ from a discrete (and finite) object D of the category $\mathcal{C}$ such that $a \in Ff(FD)$. By T_dX (resp. T_fX) we denote the set of all elements $a \in TX$ that have discrete (finite) support. It is clear that $T_fX \subset T_dX \subset TX$.

Theorem 4. *Let $\varphi : X \times Y \to Z$ be a binary operation and $\Phi : TX \times TY \to TZ$ be a $\mathbb{T}$-extension of φ. If the functor T is continuous, and for every finite discrete object D of $\mathcal{C}$ the space TD is locally compact and Hausdorff, then the topological center Λ_Φ of the binary operation Φ contains the subspace T_fX of TX. If T_fX is dense in TX, then the topological center Λ_Φ of Φ is dense in TX.*

Proof. We need to prove that for every $a \in T_fX$ the left shift $\Phi_a : TY \to TZ$, $\Phi_a : b \mapsto \Phi(a,b)$, is continuous. Since $a \in T_fX$, there is a finite discrete object D of the category $\mathcal{C}$ and a morphism $f : D \to X$ such that $a \in Ff(FD)$. Fix an element $d \in FD$ such that $a = Ff(d)$.

Consider the binary operations

$$\psi : D \times Y \to Z,\ \psi : (x,y) \mapsto \varphi(f(x),y),$$

and

$$\Psi : TD \times TY \to TZ,\ \Psi : (a,b) \mapsto \Phi(Ff(a),b).$$

It can be shown that Ψ is a $\mathbb{T}$-extension of ψ.

By Theorem 3, the binary operation Ψ is continuous. Consequently, the left shift $\Psi_d : TY \to TZ$, $\Psi_d : b \mapsto \Psi(d,b)$, is continuous. Since $\Psi_d = \Phi_a$, the left shift Φ_a is continuous too and hence $a \in \Lambda_\Phi$. $\square$

5 THE ASSOCIATIVITY OF $\mathbb{T}$-EXTENSIONS

In this section we investigate the associativity of the $\mathbb{T}$-extensions. We recall that a binary operation $\varphi : X \times X \to X$ is *associative*, if $\varphi(\varphi(x,y),z) = \varphi(x,\varphi(y,z))$ for any $x,y,z \in X$. In this case we say that X is a *semigroup*.

A subset A of a set X endowed with a binary operation $\varphi : X \times X \to X$ is called a *subsemigroup* of X, if $\varphi(A \times A) \subset A$ and $\varphi(\varphi(x,y),z) = \varphi(x,\varphi(y,z))$ for all $x,y,z \in A$.

Lemma 5.1. *Let $\varphi : X \times X \to X$ be an associative operation in $\mathcal{C}$ and $\Phi : TX \times TX \to TX$ be its $\mathbb{T}$-extension.*

1. *for any morphisms $f_A : A \to X$, $f_B : B \to X$ from discrete objects A, B in $\mathcal{C}$, the map $\varphi_{AB} = \varphi(f_A \times f_B) : A \times B \to X$ is a morphism of $\mathcal{C}$ such that $\Phi(Tf_A(a), Tf_B(b)) = T\varphi_{AB}(a \otimes b)$ for all $a \in TA$ and $b \in TB$;*
2. *$\Phi(T_dX \times T_dX) \subset T_dX$ and $\Phi(T_fX \times T_fX) \subset T_fX$;*
3. *$\Phi((a,b),c) = \Phi(a,\Phi(b,c))$ for any $a,b,c \in T_dX$.*

Proof. 1. Let $f_A : A \to X$, $f_B : B \to X$ be morphisms from discrete objects A, B of $\mathcal{C}$ and $\varphi_{AB} = \varphi(f_A \times f_B) : A \times B \to X$. By our assumption on the category $\mathcal{C}$, the product $A \times B$ is a discrete object in $\mathcal{C}$ and hence φ_{AB} is a morphism in $\mathcal{C}$. Consider the binary operation $\Phi_{AB} : TA \times TB \to TX$ defined by $\Phi_{AB}(a,b) = \Phi(Tf_A(a), Tf_B(b))$. The following diagram

$$\begin{tikzcd}
TX \times TX \arrow[rrr, "\Phi"] & & & TX \arrow[ddd, "\mathrm{id}"] \\
& X \times X \arrow[ul, "\eta\times\eta"'] \arrow[r, "\varphi"] & X \arrow[ur, "\eta"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \\
& A \times B \arrow[u, "f_A\times f_B"] \arrow[r, "\varphi_{AB}"] \arrow[dl, "\eta\times\eta"] & X \arrow[dr, "\eta"] & \\
TA \times TB \arrow[uuu, "Tf_A\times Tf_B"] \arrow[rrr, "\Phi_{AB}"'] & & & TX
\end{tikzcd}$$

implies that Φ_{AB} is a $\mathbb{T}$-extension of φ_{AB}. By Theorem 2,

$$\Phi(Tf_A(a), Tf_B(b)) = \Phi_{AB}(a,b) = T\varphi_{AB}(a \otimes b)$$

for all $a \in TA$ and $b \in TB$.

2. Given elements $a, b \in T_dX$, we need to show that the element $\Phi(a,b) \in TX$ has discrete support. Find discrete objects A, B in $\mathcal{C}$ and morphisms $f_A : A \to X$, $f_B : B \to X$ such that $a \in Ff_A(FA)$ and $b \in f_B(FB)$. Fix elements $\tilde{a} \in FA$, $\tilde{b} \in FB$ such that $a = Ff_A(\tilde{a})$ and $b = Ff_B(\tilde{b})$. Our assumption on the category $\mathcal{C}$ guarantees that $A \times B$ is a discrete object in $\mathcal{C}$.

Consider the binary operations $\psi : A \times B \to X$ and $\Psi : FA \times FB \to FZ$ defined by the formulas $\psi = \varphi \circ (f_A \times f_B)$ and $\Psi = \Phi \circ (Tf_A \times Tf_B)$. Let $\tilde{c} = \tilde{a} \otimes \tilde{b} \in T(A \times B)$. By the first statement, $\Phi(a,b) = T\psi(\tilde{a} \otimes \tilde{b}) = T\psi(\tilde{c}) \in T\psi(A \times B)$, witnessing that the element $\Phi(a,b)$ has discrete support and hence belongs to T_dX.

By analogy, we can prove that $\Phi(T_fX \times T_fX) \subset T_fX$.

3. Given any points $a, b, c \in T_dX$, we need to check the equality

$$\Phi(\Phi(a,b),c) = \Phi(a,\Phi(b,c)).$$

Find discrete objects A, B, C in $\mathcal{C}$ and morphisms $f_A : A \to X$, $f_B : B \to X$, $f_C : C \to X$ such that $a \in Tf_A(TA)$, $b \in Tf_B(TB)$ and $c \in Tf_C(TC)$. Fix elements $\tilde{a} \in TA$, $\tilde{b} \in TB$, and $\tilde{c} \in TC$ such that $a = Tf_A(\tilde{a})$, $b = Tf_B(\tilde{b})$ and $c = Tf_C(\tilde{c})$.

Consider the morphisms $\varphi_{AB} = \varphi(f_A \times f_B) : A \times B \to X$, $\varphi_{BC} = \varphi(f_B \times f_C) : B \times C \to X$

and $\varphi_{ABC} = \varphi(\varphi_{AB} \times f_C) = \varphi(f_A \times \varphi_{BC}) : A \times B \times C \to X$. Consider the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
TX \times TX \times TX \arrow[rrr, "\Phi\times\mathrm{id}"] \arrow[ddd, "\mathrm{id}\times\Phi"'] & & & TX \times TX \arrow[ddd, "\Phi"] \\
& TA \times TB \times TC \arrow[ul, "Tf_A\times Tf_B\times Tf_C"'] \arrow[r, "\otimes\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\otimes"'] & T(A\times B)\times TC \arrow[ur, "T\varphi_{AB}\times Tf_C"] \arrow[d, "\otimes"] & \\
& TA \times T(B\times C) \arrow[dl, "Tf_A\times T\varphi_{BC}"'] \arrow[r, "\otimes"'] & T(A\times B\times C) \arrow[dr, "T\varphi_{ABC}"] & \\
TX \times TX \arrow[rrr, "\Phi"'] & & & TX
\end{tikzcd}$$

In this diagram the central square is commutative because of the associativity of the tensor product $\otimes$. By the item (1) all four margin squares also are commutative. Now we see that

$$\begin{aligned}
&\Phi(\Phi(a,b),c)) = \Phi(\Phi(Tf_A(\tilde{a}), Tf_B(\tilde{b})), Tf_C(\tilde{c})) = \\
&\Phi(T\varphi_{AB}(\tilde{a}\otimes\tilde{b}), Tf_C(\tilde{c})) = T\varphi_{ABC}((\tilde{a}\otimes\tilde{b})\otimes\tilde{c}) = T\varphi_{ABC}(\tilde{a}\otimes(\tilde{b}\otimes\tilde{c})) = \\
&\Phi(Tf_A(\tilde{a}), T\varphi_{BC}(\tilde{a}\otimes\tilde{b})) = \Phi(Tf_A(\tilde{a}), \Phi(Tf_B(\tilde{b}), Tf_C(\tilde{c}))) = \Phi(a, \Phi(b,c)).
\end{aligned}$$

□

Combining Lemma 5.1 with Theorem 4, we get the main result of this paper:

Theorem 5. *Assume that the monadic functor T is continuous and for each finite discrete space F in $\mathcal{C}$ the space TF is Hausdorff and locally compact. Let $\varphi : X \times X \to X$ be an associative binary operation in $\mathcal{C}$ and $\Phi : X \times X \to X$ be its $\mathbb{T}$-extension. If the set $T_f X$ of elements with finite support is dense in TX, then the operation Φ is associative.*

Proof. By Theorem 4, the set $T_f X$ lies in the topological center Λ_Φ of the operation Φ and by Lemma 5.1, $T_f X$ is a subsemigroup of (TX, Φ). Now the associativity of Φ follows from the following general fact. □

Proposition 5.1. *A right topological operation $\cdot : X \times X \to X$ on a Hausdorff space X is associative, if its topological center contains a dense subsemigroup S of X.*

Proof. Assume conversely that $(xy)z \neq x(yz)$ for some points $x, y, z \in X$. Since X is Hausdorff, the points $(xy)z$ and $x(yz)$ have disjoint open neighborhoods $O((xy)z)$ and $O(x(yz))$ in X. Since the right shifts in X are continuous, there are open neighborhoods $O(xy)$ and $O(x)$ of the points xy and x such that $O(xy) \cdot z \subset O((xy)z)$ and $O(x) \cdot (yz) \subset O(x(yz))$. We can assume that $O(x)$ is so small that $O(x) \cdot y \subset O(xy)$. Take any point $a \in O(x) \cap S$. It follows that $a(yz) \in O(x(yz))$ and $ay \in O(xy)$. Since the left shift $l_a : \beta S \to \beta S$, $l_a : y \mapsto ay$, is continuous, the points yz and y have open neighborhoods $O(yz)$ and $O(y)$ such that $a \cdot O(yz) \subset O(x(yz))$ and $a \cdot O(y) \subset O(xy)$. We can assume that the neighborhood $O(y)$ is so small that $O(y) \cdot z \subset O(yz)$. Choose a point $b \in O(y) \cap S$ and observe that $bz \in O(y) \cdot z \subset O(yz)$, $ab \in a \cdot O(y) \subset O(xy)$, and thus $(ab)z \in O(xy) \cdot z \subset O((xy)z)$. The continuity of the left shifts l_b and l_{ab} allows us to find an open neighborhood $O(z) \subset \beta S$ of

z such that $b \cdot O(z) \subset O(yz)$ and $ab \cdot O(z) \subset O((xy)z)$. Finally take any point $c \in S \cap O(z)$. Then $(ab)c \in ab \cdot O(z) \subset O((xy)z)$ and $a(bc) \subset a \cdot O(yz) \subset O(x(yz))$ belong to disjoint sets, which is not possible as $(ab)c = a(bc)$. □

6 $\mathbb{T}$-EXTENSION FOR SOME CONCRETE MONADIC FUNCTORS

In this section we consider some examples of monadic functors in topological categories. Let **Tych** denote the category of Tychonov spaces and their continuous maps and **Comp** be the full subcategory of the category **Tych**, consisting of compact Hausdorff spaces.

Discrete objects in the category **Tych** are discrete topological spaces, while discrete objects in the category **Comp** are finite discrete spaces.

Consider the functor β : **Tych** $\to$ **Comp**, assigning to each Tychonov space X its Stone-Čech compactification and to a continuous map $f : X \to Y$ between Tychonov spaces its continuous extension $\beta f : \beta X \to \beta Y$. The functor β can be completed to a monad $\mathbb{T}_\beta = (\beta, \eta, \mu)$, where $\eta : X \to \beta X$ is the canonical embedding and $\mu : \beta(\beta X) \to \beta X$ is the identity map. A pair (X, ξ) is a $\mathbb{T}_\beta$-algebra if and only if X is a compact space and $\xi : \beta X \to X$ is the identity map.

Combining Theorems 1, 5, we get the following well-known corollary.

Corollary 6.1. *Each binary right-topological operation $\varphi : X \times Y \to Z$ in* **Tych** *with discrete X can be extended to a right-topological operation $\Phi : \beta X \times \beta Y \to \beta Z$, containing X in its topological center Λ_Φ. If $X = Y = Z$ and the operation φ is associative, then so is the operation Φ.*

Now let $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ be a monad in the category **Comp**. Taking the composition of the functors β : **Tych** $\to$ **Comp** and T : **Comp** $\to$ **Comp**, we obtain a monadic functor $T\beta$: **Tych** $\to$ **Comp**.

Theorem 6. *Each binary right-topological operation $\varphi : X \times Y \to Z$ in the category* **Tych** *with discrete X can be extended to a right-topological operation $\Phi : T\beta X \times T\beta Y \to T\beta Z$ that contain the set $\eta(X) \subset T\beta X$ in its topological center Λ_Φ. If the functor T is continuous, then the set $T_f X$ of elements $a \in T\beta X$ with finite support is dense in $T\beta X$ and lies in the topological center Λ_Φ of the operation Φ. Moreover, if $X = Y = Z$ and the operation φ is associative, the so is the operation Φ.*

Proof. By Theorem 1, the binary operation φ has a unique $\mathbb{T}$-extension $\Phi : TX \times TY \to TZ$. By Definition 2.1, the set $\eta(X) \subset T\beta X$ lies in the topological center Λ_φ of φ.

Now assume that the functor T is continuous. First we show that the set $T_f X$ is dense in $T\beta X$. Fix any point $a \in F\beta X$ and an open neighborhood $U \subset T\beta X$ of a. Then $[a, U] = \{f \in \mathrm{Mor}(F\beta X, F\beta X) : f(a) \in U\}$ is an open neighborhood of the identity map $\mathrm{id} : F\beta X \to F\beta X$ in the function space $\mathrm{Mor}(F\beta X, F\beta X)$ endowed with the compact-open topology. The continuity of the functor T yields a neighborhood $\mathcal{U}(\mathrm{id}_{\beta X})$ of the identity map $\mathrm{id}_{\beta X} \in \mathrm{Mor}(\beta X, \beta X)$ such that $Tf \in [a, U]$ for any $f \in \mathcal{U}(\mathrm{id}_{\beta X})$. It follows from the definition of the compact-open topology, that there is an open cover $\mathcal{U}$ of βX such that a map $f : \beta X \to \beta X$ belongs to $\mathcal{U}(\mathrm{id}_{\beta X})$, if f is $\mathcal{U}$-near to $\mathrm{id}_{\beta X}$ in the sense that for every

$x \in \beta X$ there is a set $U \in \mathcal{U}$ with $\{x, f(x)\} \subset U$. Since βX is compact, we can assume that the cover $\mathcal{U}$ is finite. Since X is discrete, the space βX has covering dimension zero [9, 7.1.17]. So, we can assume that the finite cover $\mathcal{U}$ is disjoint. For every $U \in \mathcal{U}$ choose an element $x_U \in U \cap X$. Those elements compose a finite discrete subspace $A = \{x_U : U \in \mathcal{U}\}$ of X. Let $i : A \to X$ be the identity embedding and $f : X \to A$ be the map defined by $f^{-1}(x_U) = U$ for $U \in \mathcal{U}$. It follows that $i \circ f \in \mathcal{U}(\mathrm{id}_{\beta X})$ and thus $T(i \circ f) \in [a, U]$ and $Ti \circ Tf(a) \in U$. Now we see that $b = Tf(a) \in TA$ and $c = Ti(b) \in T_f X \cap U$, so $T_f X$ is dense in βX.

By Theorem 4, the set $T_f X$ lies in the topological center Λ_Φ of Φ.

Now assume that the operation φ is associative. By Lemma 5.1, $T_f X$ is a subsemigroup of (X, Φ). Since $T_f X$ is dense and lies in the topological center Λ_Φ, we may derive the associativity of Φ from Proposition 5.1. □

Problem 1. *Given a discrete semigroup X investigate the algebraic and topological properties of the compact right-topological semigroup $T\beta X$ for some concrete continuous monadic functors T :* **Comp** $\to$ **Comp**.

This problem was addressed in [10], [11] for the monadic functor G of inclusion hyperspaces, in [2]–[5] for the functor of superextension λ, in [1], [12], [15] for the functor P of probability measures and in [6], [7], [8], [18] for the hyperspace functor exp.

In [19] it was shown that for each continuous monadic functor T : **Comp** $\to$ **Comp** any continuous (associative) operation $\varphi : X \times Y \to Z$ in **Comp** extends to a continuous (associative) operation $\Phi : TX \times TX \to TX$.

Problem 2. *For which monads $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ in the category* **Comp** *each right-topological (associative) binary operation $\varphi : X \times Y \to Z$ in* **Comp** *extends to a right-topological (associative) binary operation $\Phi : TX \times TY \to TZ$? Are all such monads power monads?*

REFERENCES

1. Banakh T., Cencelj M., Hryniv O., Repovs D. *Characterizing compact Clifford semigroups that embed into convolution and functor-semigroups*, preprint (http://arxiv.org/abs/0811.1026).
2. Banakh T., Gavrylkiv V., Nykyforchyn O. *Algebra in superextensions of groups, I: zeros and commutativity*, Algebra Discrete Math, 3 (2008), 1-29.
3. Banakh T., Gavrylkiv V. *Algebra in superextension of groups, II: cancelativity and centers*, Algebra Discrete Math, 4 (2008), 1-14.
4. Banakh T., Gavrylkiv V. *Algebra in the superextensions of groups, III: minimal left ideals*, Mat. Stud., **31**, 2 (2009), 142-148.
5. Banakh T., Gavrylkiv V. *Algebra in the superextensions of groups, IV: representation theory*, preprint (http://arxiv.org/abs/0811.0796).
6. Banakh T., Hryniv O. *Embedding topological semigroups into the hyperspaces over topological groups*, Acta Univ. Carolinae, Math. et Phys., **48**, 2 (2007), 3-18.
7. Bershadskii S.G. *Imbeddability of semigroups in a global supersemigroup over a group*, in: Semigroup varieties and semigroups of endomorphisms, Leningrad Gos. Ped. Inst., Leningrad, 1979, 47-49.

8. Bilyeu R.G., Lau A. *Representations into the hyperspace of a compact group*, Semigroup Forum **13** (1977), 267-270.
9. Engelking R. General Topology, PWN, Warsaw, 1977.
10. Gavrylkiv V. *The spaces of inclusion hyperspaces over noncompact spaces*, Mat. Stud., **28**, 1 (2007), 92-110.
11. Gavrylkiv V. *Right-topological semigroup operations on inclusion hyperspaces*, Mat. Stud., **29**, 1 (2008), 18-34.
12. Heyer H. *Probability Measures on Locally Compact Groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 94. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
13. Hindman N., Strauss D. Algebra in the Stone-Čech compactification, de Gruyter, Berlin, New York, 1998.
14. MacLane S. Categories for working mathematicican, Springer, 1971.
15. Parthasarathy K.R. Probability Measures on Metric Spaces, AMS Bookstore, 2005.
16. Protasov I. Combinatorics of Numbers, VNTL, Lviv, 1997.
17. Teleiko A., Zarichnyi M. Categorical Topology of Compact Hausdoff Spaces, VNTL, Lviv, 1999.
18. Trnkova V. *On a representation of commutative semigroups*, Semigroup Forum, **10**, 3 (1975), 203-214.
19. Zarichnyi M., Teleiko A. *Semigroups and monads*, in: Algebra and Topology, Lviv Univ. Press, 1996, 84-93 (in Ukrainian).

Ivan Franko National University,
Lviv, Ukraine.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
Ivano-Frankivsk, Ukraine.

Received 2.12.2009

Банах Т.О., Гаврилків В.М. *Продовження бінарних операцій на функтор-простори // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 114–127.

Маючи неперервний монадичний функтор T : **Comp** $\to$ **Comp** в категорії компактів і дискретну топологічну напівгрупу X, ми продовжуємо напівгрупову операцію $\varphi : X \times X \to X$ до правотопологічної напівгрупової операції $\Phi : T\beta X \times T\beta X \to T\beta X$, топологічний центр Λ_Φ якої містить всюди щільну піднапівгрупу $T_f X$, яка складається з елементів $a \in T\beta X$ зі скінченним носієм в X.

Банах Т.О., Гаврилкив В.М. *Продолжение бинарных операций на функтор-пространства // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 114–127.

Пусть T : **Comp** $\to$ **Comp** – непрерывный монадический функтор в категории компактов и X – дискретная топологическая полугруппа. В работе построено продолжение полугрупповой операции $\varphi : X \times X \to X$ до правотопологической полугрупповой операции $\Phi : T\beta X \times T\beta X \to T\beta X$, топологический центр которой содержит всюду плотную подполугруппу $T_f X$, содержащую елементы $a \in T\beta X$ с конечным носителем в X.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 517.98

Василишин Т.В., Загороднюк А.В.

ПОЛЯРИЗАЦІЙНА ФОРМУЛА ТА ПОЛЯРИЗАЦІЙНА НЕРІВНІСТЬ ДЛЯ (P,Q)-ЛІНІЙНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Василишин Т.В., Загороднюк А.В. *Поляризаційна формула та поляризаційна нерівність для (p,q)-лінійних відображень* // *Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 128–144.

В роботі встановлено аналог поляризаційної формули, поляризаційної нерівності та формули Мартіна для (p,q)-лінійних відображень на нормованих просторах.

1 Вступ та основні означення

Нехай X і Y — комплексні лінійні простори. Позначимо X^n — n-тий декартовий степінь простору X. Нехай $A_n(x_1,\dots,x_n)$ буде мультилінійним симетричним відображенням з X^n в Y, тоді $P_n(x) = A_n(\underbrace{x,\dots,x}_{n})$ називається *n-однорідним поліномом* на X.

Відомо, що $A_n(x_1,\dots,x_n)$ можна відновити з $P_n(x)$ за допомогою класичної *поляризаційної формули*:

$$A_n(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n=0}^{1}(-1)^{n-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n)}P_n(x'+\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_nx_n), \qquad (1)$$

де x' — довільний елемент з X.

Поляризаційна формула є фундаментальним результатом в теорії поліноміальних відображень, який багато разів перевідкривався і публікувався. Першим її опублікував Р. Мартін в [6], проте відомо, що її знав раніше С. Банах. Незалежно від Р. Мартіна поляризаційну формулу довели С. Мазур і В. Орліч в [7]. В літературі відомо багато різних форм поляризаційної формули. Найбільш загальний підхід до виведення класичних поляризаційних формул викладено в монографії Ш. Дініна [5]. У статті І. Сарантопулоса [9] доведено наступний варіант поляризаційної формули:

$$n!A_n(x_1,\dots,x_n) = \int_0^1 r_1(t)\dots r_n(t)P_n\left(r_1(t)x_1+\dots+r_n(t)x_n\right)dt,$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46J20, 46E15.

Ключові слова і фрази: поляризаційна формула, (p,q)-лінійне відображення, поляризаційна нерівність.

© Василишин Т.В., Загороднюк А.В., 2009

де $r_i(t) = \operatorname{sign}\sin 2^i\pi t$ — *відомі функції Радемахера*. У статтях [2], [3] автори ввели так звані узагальнені функції Радемахера і використали їх для доведення різних варіантів поляризаційної формули. В роботі [4] узагальнені функції Радемахера використовуються для виведення аналога поляризаційної формули для неоднорідних поліномів та аналітичних відображень банахового простору.

У випадку, коли X, Y — нормовані простори, поляризаційна формула використовується для доведення так званої поляризаційної нерівності. Так, наприклад, в монографії Х. Мухіка [8] на основі формули

$$A_n(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n=\pm1}\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_nP_n(x'+\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_nx_n)$$

доведено класичну поляризаційну нерівність:

$$\|A_n\| \le \frac{n^n}{n!}\|P_n\|.$$

Відомо, що для простору ℓ_1 *поляризаційну константу* $n^n/n!$ неможливо покращити, тоді як у випадку ℓ_2 її можна замінити на одиницю [5].

Дамо означення об'єктів, вивченню яких присвячена дана робота.

Означення 1.1. *Відображення $B_{p,q}(x_1,\dots,x_p;x_{p+1},\dots,x_{p+q})$, $B_{p,q}: X^{p+q}\to Y$, назвемо (p,q)-лінійним симетричним відображенням, якщо воно має наступні властивості:*

1°. $\forall i\in\{1,\dots,p+q\},\quad \forall x_i', x_i''\in X$

$$B_{p,q}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i'+x_i'',x_{i+1},\dots,x_{p+q}) = B_{p,q}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i',x_{i+1}\dots,x_{p+q}) + B_{p,q}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i'',x_{i+1}\dots,x_{p+q});$$

2°. $\forall i\in\{1,\dots,p\},\quad \forall\lambda\in\mathbb{C}$

$$B_{p,q}(x_1,\dots,\lambda x_i,\dots,x_p;x_{p+1},\dots,x_{p+q}) = \lambda B_{p,q}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_p;x_{p+1},\dots,x_{p+q});$$

3°. $\forall i\in\{p+1,\dots,p+q\},\quad \forall\lambda\in\mathbb{C}$

$$B_{p,q}(x_1,\dots,x_p;x_{p+1},\dots,\lambda x_i,\dots,x_{p+q}) = \overline{\lambda}B_{p,q}(x_1,\dots,x_p;x_{p+1},\dots,x_i,\dots,x_{p+q});$$

4°. $\forall\sigma\in S_p$

$$B_{p,q}(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(p)};x_{p+1},\dots,x_{p+q}) = B_{p,q}(x_1,x_2,\dots,x_p;x_{p+1},\dots,x_{p+q});$$

5°. $\forall\sigma\in S_q$

$$B_{p,q}(x_1,\dots,x_p;x_{p+\sigma(1)},x_{p+\sigma(2)},\dots,x_{p+\sigma(q)}) = B_{p,q}(x_1,\dots,x_p;x_{p+1},x_{p+2},\dots,x_{p+q}).$$

Означення 1.2. *Звуження (p,q)-лінійного симетричного відображення на діагональ $P_{p,q}(x) = B_{p,q}(\underbrace{x,\dots,x}_{p};\underbrace{x,\dots,x}_{q})$ будемо називати (p,q)-поліномом.*

З означення 1.2 випливає, що для довільного $\lambda \in \mathbb{C}$ і для довільних $x, y \in X$:

1°. $P_{p,q}(\lambda x) = \lambda^p \overline{\lambda}^q P_{p,q}(x)$;

2°. $P_{p,q}(x + \lambda y) = \sum\limits_{i=0}^{p} \sum\limits_{j=0}^{q} C_p^i C_q^j \lambda^i \overline{\lambda}^j B_{p,q}(\underbrace{x, \ldots, x}_{p-i}, \underbrace{y, \ldots, y}_{i}; \underbrace{x, \ldots, x}_{q-j}, \underbrace{y, \ldots, y}_{j})$.

Зауваження 1.1. *Зауважимо, що формула (1) є правильною також для $(0, n)$-лінійних симетричних відображень.*

У розділі 2 даної роботи буде отримано поляризаційну формулу для (p, q)-поліномів. У розділі 3 буде розглянуто процес відновлення (p, q)-поліномів із функцій вигляду:

$$P(x) = \sum_{p=0}^{n} P_{p,n-p}(x),$$

які в [1] називаються n-однорідними $*$-поліномами. Отримана формула є аналогом відомої формули Мартіна, вперше доведеної в роботі [6] для поліномів. У розділі 4 доводиться інший варіант поляризаційної формули, у якій використано функції Радемахера і узагальнені функції Радемахера. Поляризаційна нерівність для (p, q)-поліномів на нормованих просторах доводиться у розділі 5.

2 Поляризаційна формула для (p, q)-поліномів

Теорема 1. *Нехай X і Y — комплексні лінійні простори. Нехай $B_{p,q}(x_1, \ldots, x_{p+q})$ — (p, q)-лінійне симетричне відображення з X^{p+q} в Y, $P_{p,q}(x)$ — відповідний (p, q)-поліном. Тоді $B_{p,q}(x_1, \ldots, x_{p+q})$ можна відновити з $P_{p,q}(x)$ за допомогою наступної формули:*

$$B_{p,q}(x_1, \ldots, x_p; x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) =$$
$$\frac{1}{2^m p!\, q!} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p+q}=0}^{1} (-1)^{p+q-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{p+q})} \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_m=0}^{1} (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2} \ldots r_m^{\mu_m})^q \times$$
$$P_{p,q}\big((x' + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p) + (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2} \ldots r_m^{\mu_m})(x'' + \varepsilon_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \varepsilon_{p+q} x_{p+q})\big),$$

де

$$r_k = \cos\frac{\pi}{2^{k-1}} + i \sin\frac{\pi}{2^{k-1}},$$
$$m = \big[\log_2(p+q)\big] + 1,$$

x', x'' — довільні елементи з X.

Доведення. Ми можемо розглянути $B_{p,q}(x_1, \ldots, x_p; x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$ як p-лінійне симетричне відображення з фіксованими параметрами $x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}$, тобто

$$B_{p,q}(x_1, \ldots, x_p; x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) \equiv B_p^{x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}}(x_1, \ldots, x_p).$$

Скориставшись поляризаційною формулою (1), дістанемо:

$$B_p^{x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}}(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p=0}^{1} (-1)^{p-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_p)} \times P_p^{x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}}(x' + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p),$$

де $P_p^{x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}}(x)$ — це p-однорідний поліном з фіксованими параметрами $x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}$, тобто

$$P_p^{x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}}(x) = B_p^{x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}}(\underbrace{x, \ldots, x}_{p}) = B_{p,q}(\underbrace{x, \ldots, x}_{p}; x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) = B_q^x(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}).$$

З іншого боку, $B_q^x(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$ є симетричним відображенням, антилінійним по кожній змінній ($(0, q)$-лінійним симетричним відображенням), яке залежить від фіксованого параметра x. З формули (1) і зауваження 1.1 випливає, що

$$B_q^x(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) = \frac{1}{q!} \sum_{\varepsilon_{p+1}, \ldots, \varepsilon_{p+q}=0}^{1} (-1)^{q-(\varepsilon_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q})} \times$$
$$B_q^x(\underbrace{x'' + \varepsilon_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \varepsilon_{p+q} x_{p+q}, \ \ldots\ , x'' + \varepsilon_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \varepsilon_{p+q} x_{p+q}}_{q}).$$

Отже, $B_{p,q}(x_1, \ldots, x_p; x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) =$

$$\frac{1}{p!} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p=0}^{1} (-1)^{p-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_p)} P_p^{x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}}(x' + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p) =$$
$$\frac{1}{p!} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p=0}^{1} (-1)^{p-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_p)} \times$$
$$B_{p,q}(\underbrace{x' + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p, \ \ldots\ , x' + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p}_{p}; x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) =$$
$$\frac{1}{p!} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p=0}^{1} (-1)^{p-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_p)} \frac{1}{q!} \sum_{\varepsilon_{p+1}, \ldots, \varepsilon_{p+q}=0}^{1} (-1)^{q-(\varepsilon_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q})} \times$$
$$B_{p,q}(\underbrace{x' + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p, \ \ldots\ , x' + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p}_{p};$$
$$\underbrace{x'' + \varepsilon_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \varepsilon_{p+q} x_{p+q}, \ \ldots\ , x'' + \varepsilon_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \varepsilon_{p+q} x_{p+q}}_{q}) =$$
$$\frac{1}{p!q!} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p+q}=0}^{1} (-1)^{p+q-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{p+q})} \times$$
$$B_{p,q}(\underbrace{x' + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p, \ \ldots\ , x' + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p}_{p};$$
$$\underbrace{x'' + \varepsilon_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \varepsilon_{p+q} x_{p+q}, \ \ldots\ , x'' + \varepsilon_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \varepsilon_{p+q} x_{p+q}}_{q}).$$

Таким чином, ми звели нашу проблему до відновлення $B_{p,q}(\underbrace{y, \ldots, y}_{p}; \underbrace{z, \ldots, z}_{q})$ за функцією $P_{p,q}(x)$.

Введемо деякі технічні функції.

Означення 2.1. *Означимо функцію f з простору матриць розмірності $(p+1)\times(q+1)$ у простір Y наступним чином:*

$$f\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & \dots & a_{p0} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{p1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0q} & a_{1q} & a_{2q} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} C_p^i C_q^j a_{ij} B_{p,q}(\underbrace{x,\dots,x}_{p-i},\underbrace{y,\dots,y}_{i};\underbrace{x,\dots,x}_{q-j},\underbrace{y,\dots,y}_{j}),$$

де x, y — довільні фіксовані елементи з X, $a_{ij}\in\mathbb{C}$.

З означення випливає, що f є лінійним відображенням.

Означення 2.2. *Покладемо $M_0(x,y,\lambda) = P_{p,q}(x+\lambda y)$, $M_k(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}\big(M_{k-1}(x,y,\lambda) + r_k^q M_{k-1}(x,y,r_k\lambda)\big)$, $k\geq 1$, де $r_k = \cos\frac{\pi}{2^{k-1}} + i\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}$.*

Ми знаємо, що

$$P_{p,q}(x+\lambda y) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} C_p^i C_q^j \lambda^i\overline{\lambda}^j B_{p,q}(\underbrace{x,\dots,x}_{p-i},\underbrace{y,\dots,y}_{i};\underbrace{x,\dots,x}_{q-j},\underbrace{y,\dots,y}_{j}),$$

тому

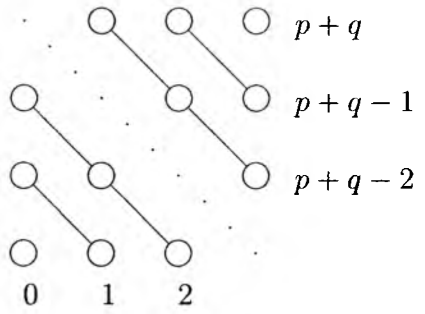
$$M_0(x,y,\lambda) = P_{p,q}(x+\lambda y) = f\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^p \\ \overline{\lambda} & \lambda\overline{\lambda} & \lambda^2\overline{\lambda} & \dots & \lambda^p\overline{\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\lambda}^q & \lambda\overline{\lambda}^q & \lambda^2\overline{\lambda}^q & \dots & \lambda^p\overline{\lambda}^q \end{pmatrix}.$$

З означення $M_k(x,y,\lambda)$ і лінійності f випливає, що

$$M_k(x,y,\lambda) = f\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & \dots & a_{p0} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{p1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0q} & a_{1q} & a_{2q} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix},$$

тобто $M_k(x,y,\lambda)$ відповідає деякій матриці $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & \dots & a_{p0} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{p1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0q} & a_{1q} & a_{2q} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$. Назвемо цю матрицю *матрицею відображення* $M_k(x,y,\lambda)$.

Пронумеруємо діагоналі матриці таким чином:



Діагональ, всі елементи якої дорівнюють нулю, будемо називати нульовою.

Зауваження 2.1. *У матриці відображення $M_0(x,y,\lambda)$*

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \dots \\ \dots & \lambda\overline{\lambda} & \lambda^2\overline{\lambda} & \lambda^3\overline{\lambda} & \dots \\ \vdots & \dots & \lambda^2\overline{\lambda}^2 & \lambda^3\overline{\lambda}^2 & \dots \\ \overline{\lambda}^{q-2} & \dots & \vdots & \lambda^3\overline{\lambda}^3 & \dots \\ \overline{\lambda}^{q-1} & \lambda\overline{\lambda}^{q-1} & \dots & \vdots & \dots \\ \overline{\lambda}^{q} & \lambda\overline{\lambda}^{q} & \lambda^2\overline{\lambda}^{q} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

на діагоналі з номером d знаходяться елементи $\lambda^i\overline{\lambda}^j$, де

$$i - j = const = d - q, \qquad d = 0,\dots,p+q.$$

Якщо ми замінимо λ на $r_k\lambda$ у $M_0(x,y,\lambda)$, то на діагоналі з номером d одержимо:

$$(r_k\lambda)^i\,\overline{(r_k\lambda)}^j = {r_k}^i\,\overline{r_k}^j\lambda^i\overline{\lambda}^j = {r_k}^{i-j}\lambda^i\overline{\lambda}^j = {r_k}^{d-q}\lambda^i\overline{\lambda}^j.$$

Отже, степінь, в якому входить r_k в $M_0(x,y,r_k\lambda)$, залежить тільки від номера діагоналі d і параметра q.

Лема 2.1. *Розглянемо матрицю відображення $M_k(x,y,\lambda)$ для довільного натурального k. У такій матриці нульовими будуть діагоналі, номери яких не діляться на 2^k (тобто $d \mod 2^k \neq 0$). Елементи на інших діагоналях ($d \mod 2^k = 0$) дорівнюють відповідним елементам матриці відображення $M_0(x,y,\lambda)$.*

Доведення. Будемо доводити лему за індукцією по k.

Для $k=1$:
$M_1(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}\big(M_0(x,y,\lambda) + r_1^q M_0(x,y,r_1\lambda)\big)$.

$$r_1^q M_0(x,y,r_1\lambda) = r_1^q f\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & (r_1\lambda)^{p-1} & (r_1\lambda)^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (r_1\lambda)^p\overline{r_1\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{r_1\lambda}^{q-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{r_1\lambda}^{q-1} & r_1\lambda\overline{r_1\lambda}^{q-1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{r_1\lambda}^{q} & r_1\lambda\overline{r_1\lambda}^{q} & (r_1\lambda)^2\overline{r_1\lambda}^{q} & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$f\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & (-1)^{q+p-1}\lambda^{p-1} & (-1)^{q+p}\lambda^{p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (-1)^{q+p-1}\lambda^{p}\overline{\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{\lambda}^{q-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\overline{\lambda}^{q-1} & \lambda\overline{\lambda}^{q-1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\lambda}^{q} & -\lambda\overline{\lambda}^{q} & \lambda^2\overline{\lambda}^{q} & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

$$M_1(x,y,\lambda) = \frac{M_0(x,y,\lambda)+r_1^qM_0(x,y,r_1\lambda)}{2} = \frac{1}{2}f\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\lambda}^{q-3} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\lambda}^{q-2} & \lambda\overline{\lambda}^{q-2} & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\lambda}^{q-1} & \lambda\overline{\lambda}^{q-1} & \lambda^2\overline{\lambda}^{q-1} & \dots & \dots \\ \overline{\lambda}^{q} & \lambda\overline{\lambda}^{q} & \lambda^2\overline{\lambda}^{q} & \lambda^3\overline{\lambda}^{q} & \dots \end{pmatrix} +$$

$$\frac{1}{2}f\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\overline{\lambda}^{q-3} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\lambda}^{q-2} & -\lambda\overline{\lambda}^{q-2} & \dots & \dots & \dots \\ -\overline{\lambda}^{q-1} & \lambda\overline{\lambda}^{q-1} & -\lambda^2\overline{\lambda}^{q-1} & \dots & \dots \\ \overline{\lambda}^{q} & -\lambda\overline{\lambda}^{q} & \lambda^2\overline{\lambda}^{q} & -\lambda^3\overline{\lambda}^{q} & \dots \end{pmatrix} =$$

$$f\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\lambda}^{q-2} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda\overline{\lambda}^{q-1} & 0 & \dots & \dots \\ \overline{\lambda}^{q} & 0 & \lambda^2\overline{\lambda}^{q} & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці відображення $M_1(x,y,\lambda)$ на діагоналях з непарними номерами (тобто $d \mod 2 \neq 0$) дорівнюють нулю. Елементи на парних діагоналях дорівнюють відповідним елементам матриці відображення $M_0(x,y,\lambda)$. Таким чином, базу індукції встановлено.

Нехай для матриці відображення $M_{k-1}(x,y,\lambda)$ елементи на діагоналях d таких, що $d \mod 2^{k-1} \neq 0$, дорівнюють 0, а на інших діагоналях елементи дорівнюють відповідним елементам матриці відображення $M_0(x,y,\lambda)$. Розглянемо $r_k^qM_{k-1}(x,y,r_k\lambda)$. Із зауваження 2.1 випливає, що на ненульових діагоналях ($d \mod 2^{k-1} = 0$) маємо:

$$r_k^q(r_k\lambda)^i\,\overline{(r_k\lambda)}^j = r_k^{i-j+q}\lambda^i\overline{\lambda}^j = r_k^{d-q+q}\lambda^i\overline{\lambda}^j = r_k^d\lambda^i\overline{\lambda}^j,$$

$$d \mod 2^{k-1} = 0 \implies d = 2^{k-1}d',$$

$$r_k^d = \left(\cos\frac{\pi}{2^{k-1}} + i\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}d'} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{d'} = (-1)^{d'}.$$

Якщо d' — парне ($d' \mod 2 = 0$), то $r_k^d = 1$ і елементи на діагоналі ті самі, що і в матриці відображення $M_{k-1}(x,y,\lambda)$. Якщо d' — непарне ($d' \mod 2 \neq 0$), то $r_k^d = -1$ і знак елементів на діагоналі міняється. Отже, знак міняється, якщо $d \mod 2^k \neq 0$, і не міняється, якщо $d \mod 2^k = 0$.

Розглянемо $M_k(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}\big(M_{k-1}(x,y,\lambda) + r_k^qM_{k-1}(x,y,r_k\lambda)\big)$. Діагоналі з номерами d, $d \mod 2^{k-1} \neq 0$, матриці відображення $M_k(x,y,\lambda)$ є нульовими (оскільки нульовими є відповідні діагоналі матриць відображень $M_{k-1}(x,y,\lambda)$ і $r_k^qM_{k-1}(x,y,r_k\lambda)$). На діагоналях d, $d \mod 2^{k-1} = 0$ і $d \mod 2^k \neq 0$, будуть нулі, оскільки ми додаємо протилежні числа $\lambda^i\overline{\lambda}^j$ і $-\lambda^i\overline{\lambda}^j$, $i-j=d$. На діагоналях d, $d \mod 2^k = 0$, елементи дорівнюють відповідним елементам матриці відображення $M_{k-1}(x,y,\lambda)$, тобто дорівнюють відповідним елементам матриці відображення $M_0(x,y,\lambda)$. Отже, матриця відображення $M_k(x,y,\lambda)$ має нульові діагоналі з номерами d, $d \mod 2^k \neq 0$. Діагоналі d, $d \mod 2^k = 0$, такі самі, як і відповідні діагоналі матриці відображення $M_0(x,y,\lambda)$. Лему доведено. □

Продовження доведення теореми. Матриці відображень $M_k(x,y,\lambda)$ мають $p+q+1$ діагоналей. Ненульовими є діагоналі з номерами d, $d \mod 2^k = 0$. Всі інші діагоналі є нульовими. Оскільки $0 \mod 2^k = 0$, то діагональ $d=0$ (лівий нижній елемент) є ненульовою.

Нехай $m = [\log_2(p+q)]+1$. Тоді для кожного $d \in \{1,2,\dots,p+q\}$, $d \mod 2^m \neq 0$, оскільки $2^m = 2^{[\log_2(p+q)]+1} > 2^{\log_2(p+q)} = p+q$. Отже, матриця відображення $M_m(x,y,\lambda)$ має лише одну ненульову діагональ з номером $d=0$.

Із означення 2.1 маємо:

$$M_m(x,y,\lambda) = f\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\lambda}^q & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$C_p^0C_q^0\overline{\lambda}^qB_{p,q}(\underbrace{x,\dots,x}_{p};\underbrace{y,\dots,y}_{q}) = \overline{\lambda}^qB_{p,q}(\underbrace{x,\dots,x}_{p};\underbrace{y,\dots,y}_{q}).$$

Покладемо $\lambda = 1$, тоді $M_m(x,y,1) = B_{p,q}(\underbrace{x,\dots,x}_{p};\underbrace{y,\dots,y}_{q})$. Отже, ми визначили, що

$B_{p,q}(\underbrace{x,\dots,x}_{p};\underbrace{y,\dots,y}_{q}) = M_m(x,y,1)$, де

$$m = [\log_2(p+q)]+1,$$

$$M_0(x,y,\lambda) = P_{p,q}(x+\lambda y),$$

$$M_k(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}\big(M_{k-1}(x,y,\lambda) + r_k^qM_{k-1}(x,y,r_k\lambda)\big).$$

Із останньої рекурентної формули знайдемо вираз для $M_k(x,y,\lambda)$ через (p,q)-поліном.

Лема 2.2. *Для довільного натурального k виконується тотожність*

$$M_k(x,y,\lambda) = \sum_{\mu_1,\dots,\mu_k=0}^{1} (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_k^{\mu_k})^q \frac{1}{2^k} P_{p,q}\left(x + (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_k^{\mu_k})\lambda y\right).$$

Доведення. Будемо доводити лему за індукцією. Для $k=1$:

$$M_1(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}\big(M_0(x,y,\lambda) + r_1^q M_0(x,y,r_1\lambda)\big) = \frac{1}{2^1}\big(((r_1^0)^q)P_{p,q}(x+\lambda y) + r_1^q P_{p,q}(x + r_1\lambda y)\big) = \sum_{\mu_1=0}^{1} (r_1^{\mu_1})^q \frac{1}{2^1} P_{p,q}\left(x + (r_1^{\mu_1})\lambda y\right).$$

Припустимо, що

$$M_k(x,y,\lambda) = \sum_{\mu_1,\dots,\mu_k=0}^{1} (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_k^{\mu_k})^q \frac{1}{2^k} P_{p,q}\left(x + (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_k^{\mu_k})\lambda y\right).$$

Тоді $M_{k+1}(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}\big(M_k(x,y,\lambda) + r_{k+1}^q M_k(x,y,r_{k+1}\lambda)\big) =$

$$\frac{1}{2}\Big(\sum_{\mu_1,\dots,\mu_k=0}^{1} (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_k^{\mu_k})^q \frac{1}{2^k} P_{p,q}\big(x + (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_k^{\mu_k})\lambda y\big) +$$
$$r_{k+1}^q \sum_{\mu_1,\dots,\mu_k=0}^{1} (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_k^{\mu_k})^q \frac{1}{2^k} P_{p,q}\big(x + (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_k^{\mu_k}) r_{k+1}\lambda y\big)\Big) =$$
$$\frac{1}{2^{k+1}}\Big(\sum_{\mu_1,\dots,\mu_k=0}^{1} (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_k^{\mu_k} r_{k+1}^0)^q P_{p,q}\big(x + (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_k^{\mu_k} r_{k+1}^0)\lambda y\big) +$$
$$\sum_{\mu_1,\dots,\mu_k=0}^{1} (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_k^{\mu_k} r_{k+1}^1)^q P_{p,q}\big(x + (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_k^{\mu_k}) r_{k+1}^1\lambda y\big)\Big) =$$
$$\frac{1}{2^{k+1}} \sum_{\mu_1,\dots,\mu_{k+1}=0}^{1} (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_k^{\mu_k} r_{k+1}^{\mu_{k+1}})^q P_{p,q}\big(x + (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_k^{\mu_k} r_{k+1}^{\mu_{k+1}})\lambda y\big).$$

Лему доведено. □

Отже, поляризаційна формула матиме такий остаточний вигляд:

$$B_{p,q}(x_1,\dots,x_p;x_{p+1},\dots,x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!}\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{p+q}=0}^{1} (-1)^{p+q-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{p+q})} \times$$
$$\sum_{\mu_1,\dots,\mu_m=0}^{1} (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_m^{\mu_m})^q \frac{1}{2^m} P_{p,q}\Big(x' + \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_p x_p + (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\dots r_m^{\mu_m})(x'' + \varepsilon_{p+1}x_{p+1} + \dots + \varepsilon_{p+q}x_{p+q})\Big),$$

де $m = [\log_2(p+q)] + 1$. Доведення теореми завершено. □

3 Аналог формули Мартіна

Нехай $P(x) = \sum_{p=0}^{n} P_{p,q}(x)$, де $q = n - p$, $P_{p,q}(x)$ — довільні (p,q)-поліноми. Якщо $|\lambda| = 1$, то

$$P(\lambda x) = \sum_{p=0}^{n} P_{p,n-p}(\lambda x) = \sum_{p=0}^{n} \lambda^p \overline{\lambda}^{n-p} P_{p,n-p}(x) = \sum_{p=0}^{n} \lambda^p \lambda^{p-n} P_{p,n-p}(x) = \lambda^{-n}\sum_{p=0}^{n} \lambda^{2p} P_{p,n-p}(x).$$

Візьмемо попарно різні числа λ_j, $j = 1,\dots,n+1$, такі, що $|\lambda_j| = 1$ і $\lambda_j^2 \neq \lambda_k^2$ при $j \neq k$. Отримаємо систему з $n+1$ рівняння:

$$\sum_{p=0}^{n} \lambda_j^{2p} P_{p,n-p}(x) = \lambda_j^n P(\lambda_j x), \qquad j = 1,\dots,n+1.$$

Визначник цієї системи є визначником Вандермонда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 & \lambda_{n+1}^2 \\ \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \dots & \lambda_n^4 & \lambda_{n+1}^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2n} & \lambda_2^{2n} & \lambda_3^{2n} & \dots & \lambda_n^{2n} & \lambda_{n+1}^{2n} \end{vmatrix} = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\dots(\lambda_{n+1}^2 - \lambda_1^2)\times$$
$$(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)\dots(\lambda_{n+1}^2 - \lambda_2^2)\dots(\lambda_{n+1}^2 - \lambda_n^2) \neq 0.$$

З цієї системи рівнянь можемо визначити $P_{p,q}(x)$.

Таким чином, ми довели наступну теорему.

Теорема 2. *Для довільного натурального n та набору комплексних чисел λ_j, $j = 1,\dots,n$, таких, що $|\lambda_j| = 1$, $\lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$ при $i \neq j$, існують числа $a_j^{p,n-p}$, $j = 1,\dots,n+1$, $p = 0,\dots,n$ такі, що для довільного $P(x) = \sum_{p=0}^{n} P_{p,n-p}(x)$ виконуються тотожності:*

$$P_{p,n-p}(x) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j^{p,n-p} P(\lambda_j x), \qquad p = 0,\dots,n.$$

4 Виведення поляризаційної формули з використанням функцій Радемахера

Означення 4.1. ***Функціями Радемахера*** *називають функції $r_i(t)$, задані на $[0,1]$ формулою: $r_i(t) = \operatorname{sign}\sin 2^i \pi t$, $i \in \mathbb{N}$.*

Функції Радемахера мають такі властивості:

1°. $(r_i(t))^{2n} = 1$;

2°. $(r_i(t))^{2n+1} = r_i(t)$;

3°. Нехай $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$.

$$\int_0^1 (r_1(t))^{m_1} (r_2(t))^{m_2} \dots (r_n(t))^{m_n}\, dt = \begin{cases} 1, & \text{якщо всі } m_1, \dots, m_n \text{ парні}, \\ 0 & \text{в іншому випадку}. \end{cases}$$

Означення 4.2. *Для кожного натурального $n \geq 2$* ***узагальнені функції Радемахера*** *$S_j^{[n]}(t)$ визначаються наступним чином. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ комплексні корені степеня n з одиниці. Позначимо $I_j = \left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right)$ і $I_{j_1 j_2}$ — відкритий j_2-підінтервал довжиною $\frac{1}{n^2}$ інтервалу I_{j_1} $(j_1, j_2 = 1, \dots, n)$. Продовжуючи таким чином, ми можемо визначити інтервал $I_{j_1 j_2 \dots j_k}$ для довільного k. Функцію $S_1^{[n]}(t) : [0,1] \to \mathbb{C}$ означуємо, поклавши $S_1^{[n]}(t) = \alpha_j$ для $t \in I_j$, $1 \leq j \leq n$. В загальному $S_k^{[n]}(t) = \alpha_j$, якщо t належить підінтервалу $I_{j_1 j_2 \dots j_k}$, де $j = j_k$. В точках меж інтервалів ми довизначимо $S_k^{[n]}(t)$ нулем.*

Узагальнені функції Радемахера були введені в роботах [2], [3]. Ми будемо використовувати тільки першу узагальнену функцію Радемахера $S_1^{[n]}(t)$. Ця функція має такі властивості:

1°. Оскільки $S_1^{[n]}(t)$ приймає значення на одиничному колі, то

$$\overline{S_1^{[n]}(t)} = \left(S_1^{[n]}(t)\right)^{-1};$$

2°. $$\int_0^1 \left(S_1^{[n]}(t)\right)^m dt = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m \text{ ділиться на } n, \\ 0 & \text{в іншому випадку}. \end{cases}$$

Зауваження 4.1. *Ми позначаємо*

$$B_{p,q}((x_1)^{n_1}, \dots, (x_s)^{n_s}; (x_{s+1})^{n_{s+1}}, \dots, (x_k)^{n_k}) =$$
$$B_{p,q}(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{x_s, \dots, x_s}_{n_s}; \underbrace{x_{s+1}, \dots, x_{s+1}}_{n_{s+1}}, \dots, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_{n_k}).$$

Якщо деяке $n_j = 0$, то це означає, що x_j не входить до списку аргументів у даній позиції.

Зауваження 4.2. *Нехай $c_1, \dots, c_{p+q} \in \mathbb{C}$. Тоді*

$$P_{p,q}(c_1 x_1 + \dots + c_{p+q} x_{p+q}) = B_{p,q}\left((c_1 x_1 + \dots + c_{p+q} x_{p+q})^{p+q}\right) =$$
$$\sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_{p+q} \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_{p+q} = p}} \frac{p!}{k_1! \dots k_{p+q}!} \sum_{\substack{l_1 \geq 0, \dots, l_{p+q} \geq 0 \\ l_1 + \dots + l_{p+q} = q}} \frac{q!}{l_1! \dots l_{p+q}!} \times$$
$$B_{p,q}\left((c_1 x_1)^{k_1}, \dots, (c_{p+q} x_{p+q})^{k_{p+q}}; (c_1 x_1)^{l_1}, \dots, (c_{p+q} x_{p+q})^{l_{p+q}}\right) =$$
$$\sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_{p+q} \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_{p+q} = p}} c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_{p+q}^{k_{p+q}} \frac{p!}{k_1! \dots k_{p+q}!} \sum_{\substack{l_1 \geq 0, \dots, l_{p+q} \geq 0 \\ l_1 + \dots + l_{p+q} = q}} \overline{c_1^{l_1} c_2^{l_2} \dots c_{p+q}^{l_{p+q}}} \cdot \frac{q!}{l_1! \dots l_{p+q}!} \times$$
$$B_{p,q}\left((x_1)^{k_1}, \dots, (x_{p+q})^{k_{p+q}}; (x_1)^{l_1}, \dots, (x_{p+q})^{l_{p+q}}\right).$$

Доведення цієї формули аналогічне до доведення поліноміальної теореми з комбінаторики.

Теорема 3. *Нехай $B_{p,q}(x_1, \dots, x_{p+q})$ — (p,q)-лінійне симетричне відображення, $P_{p,q}(x)$ — відповідний (p,q)- поліном. Тоді*

$$B_{p,q}(x_1, \dots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \int_0^1 \int_0^1 \left(S_1^{[2q+1]}(t)\right)^{2q+1-p} r_1(\theta) r_2(\theta) \dots r_{p+q}(\theta) \times$$
$$P_{p,q}\left(S_1^{[2q+1]}(t)\,(r_1(\theta)x_1 + \dots + r_p(\theta)x_p) + (r_{p+1}(\theta)x_{p+1} + \dots + r_{p+q}(\theta)x_{p+q})\right) dt\, d\theta. \quad (2)$$

Доведення. Позначимо праву частину формули (2) через A.
Із зауваження 4.2 випливає, що

$$A = \frac{1}{p!q!} \int_0^1 \int_0^1 \left(S_1^{[2q+1]}(t)\right)^{2q+1-p} r_1(\theta) r_2(\theta) \dots r_{p+q}(\theta) \times$$
$$P_{p,q}\left(S_1^{[2q+1]}(t)\,(r_1(\theta)x_1 + \dots + r_p(\theta)x_p) + (r_{p+1}(\theta)x_{p+1} + \dots + r_{p+q}(\theta)x_{p+q})\right) dt\, d\theta =$$
$$\sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_{p+q} \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_{p+q} = p}} \frac{1}{k_1! \dots k_{p+q}!} \times \sum_{\substack{l_1 \geq 0, \dots, l_{p+q} \geq 0 \\ l_1 + \dots + l_{p+q} = q}} \frac{1}{l_1! \dots l_{p+q}!} \times$$
$$\int_0^1 \int_0^1 \left(S_1^{[2q+1]}(t)\right)^{2q+1-p} r_1(\theta) r_2(\theta) \dots r_{p+q}(\theta) \times \left(S_1^{[2q+1]}(t)\right)^{k_1 + \dots + k_p} \left(\overline{S_1^{[2q+1]}(t)}\right)^{l_1 + \dots + l_p} \times$$
$$(r_1(\theta))^{k_1 + l_1} (r_2(\theta))^{k_2 + l_2} \dots (r_{p+q}(\theta))^{k_{p+q} + l_{p+q}} \times$$
$$B_{p,q}\left((x_1)^{k_1}, \dots, (x_{p+q})^{k_{p+q}}; (x_1)^{l_1}, \dots, (x_{p+q})^{l_{p+q}}\right) dt\, d\theta =$$

$$\sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_{p+q} \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_{p+q} = p}} \frac{1}{k_1! \dots k_{p+q}!} \times \sum_{\substack{l_1 \geq 0, \dots, l_{p+q} \geq 0 \\ l_1 + \dots + l_{p+q} = q}} \frac{1}{l_1! \dots l_{p+q}!} \times$$
$$B_{p,q}\left((x_1)^{k_1}, \dots, (x_{p+q})^{k_{p+q}}; (x_1)^{l_1}, \dots, (x_{p+q})^{l_{p+q}}\right) \times$$
$$\int_0^1 \left(S_1^{[2q+1]}(t)\right)^{2q+1-p+k_1+\dots+k_p-l_1-\dots-l_p} dt \times$$
$$\int_0^1 (r_1(\theta))^{1+k_1+l_1} (r_2(\theta))^{1+k_2+l_2} \dots (r_{p+q}(\theta))^{1+k_{p+q}+l_{p+q}}\, d\theta.$$

Розглянемо другий інтеграл

$$\int_0^1 (r_1(\theta))^{1+k_1+l_1} (r_2(\theta))^{1+k_2+l_2} \dots (r_{p+q}(\theta))^{1+k_{p+q}+l_{p+q}}\, d\theta.$$

Якщо для деякого i $k_i + l_i = 0$, то в підінтегральному виразі буде множник $(r_i(\theta))^1$, тому за властивістю 3° функцій Радемахера інтеграл дорівнює 0. Тому для ненульових доданків $k_i + l_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, p+q$. Звідси $\sum\limits_{i=1}^{p+q}(k_i + l_i) \geq p+q$, і рівність досягається лише, коли $k_i + l_i = 1$, $i = 1, \ldots, p+q$. Але ми знаємо, що $k_1 + \ldots + k_{p+q} = p$ і $l_1 + \ldots + l_{p+q} = q$, тому $\sum\limits_{i=1}^{p+q}(k_i + l_i) = p+q$. Отже, для ненульових доданків $k_i + l_i = 1$, $i = 1, \ldots, p+q$ і

$$\int_0^1 (r_1(\theta))^{1+k_1+l_1}(r_2(\theta))^{1+k_2+l_2}\ldots(r_{p+q}(\theta))^{1+k_{p+q}+l_{p+q}}\,d\theta = \int_0^1 (r_1(\theta))^2(r_2(\theta))^2\ldots(r_{p+q}(\theta))^2\,d\theta = 1.$$

Запишемо суму, відкинувши нульові доданки, і врахуємо, що $l_i = 1 - k_i$, $i = 1, \ldots, p+q$.

$$A = \sum_{\substack{0\leq k_1\leq 1,\ldots,0\leq k_{p+q}\leq 1\\ k_1+\ldots+k_{p+q}=p}} \frac{1}{k_1!\ldots k_{p+q}!} \times \frac{1}{(1-k_1)!\ldots(1-k_{p+q})!} \times$$
$$B_{p,q}\left((x_1)^{k_1}, \ldots, (x_{p+q})^{k_{p+q}}; (x_1)^{1-k_1}, \ldots, (x_{p+q})^{1-k_{p+q}}\right) \times$$
$$\int_0^1 \left(S_1^{[2q+1]}(t)\right)^{2q+1-p+k_1+\ldots+k_p-(1-k_1)-\ldots-(1-k_p)}\,dt.$$

Знайдемо значення k_i, при яких інтеграл не дорівнює нулю.

$$2q+1-p+k_1+\ldots+k_p-(1-k_1)-\ldots-(1-k_p) = 2q+1-p+k_1+\ldots+k_p-p+k_1+\ldots+k_p = 2q+1-2(p-k_1-\ldots-k_p) = 2q+1-2(k_{p+1}+\ldots+k_{p+q}).$$

$0 \leq k_i \leq 1$, тому

$$1 = 2q+1-2q \leq 2q+1-2(k_{p+1}+\ldots+k_{p+q}) \leq 2q+1. \tag{3}$$

За властивістю 3° узагальнених функцій Радемахера інтеграл не дорівнює нулю тільки тоді, коли $2q+1-2(k_{p+1}+\ldots+k_{p+q})$ ділиться на $2q+1$. Із нерівностей (3) випливає, що це буде тоді, коли $2q+1-2(k_{p+1}+\ldots+k_{p+q}) = 2q+1$, тобто $k_{p+1} = \ldots = k_{p+q} = 0$. Звідси $p = k_1 + \ldots + k_p + k_{p+1} + \ldots + k_{p+q} = k_1 + \ldots + k_p$, отже, $k_1 = \ldots = k_p = 1$.

Тому остаточно сума запишеться у вигляді:

$$A = B_{p,q}\Big((x_1)^1, \ldots, (x_p)^1, (x_{p+1})^0, \ldots, (x_{p+q})^0; (x_1)^0, \ldots, (x_p)^0, (x_{p+1})^1, \ldots, (x_{p+q})^1\Big) \times \int_0^1 \left(S_1^{[2q+1]}(t)\right)^{2q+1} dt = B_{p,q}(x_1, \ldots, x_p; x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}).$$

□

5 Поляризаційна нерівність

Повернемося до Теореми 1. Якщо ми використаємо у доведенні теореми замість формули (1) поляризаційну формулу

$$A_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm 1} \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n P_n(x' + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_n x_n),$$

то, проводячи аналогічні міркування, знайдемо наступну формулу:

$$B_{p,q}(x_1, \ldots, x_p; x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!2^{p+q}} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{p+q}=\pm 1} \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{p+q} \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_m=0}^{1} \frac{1}{2^m}(r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\ldots r_m^{\mu_m})^q \times$$
$$P_{p,q}\big((x' + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p) + (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2}\ldots r_m^{\mu_m})(x'' + \varepsilon_{p+1}x_{p+1} + \ldots + \varepsilon_{p+q}x_{p+q})\big). \tag{4}$$

Нехай X і Y є нормованими просторами. Визначимо норми (p,q)-поліномів і (p,q)-лінійних симетричних відображень:

$$\|P_{p,q}\| = \sup\left\{\|P_{p,q}(x)\| : x \in B\right\}$$

і

$$\|B_{p,q}\| = \sup\left\{\|B_{p,q}(x_1, \ldots, x_{p+q})\| : x_1, \ldots, x_{p+q} \in B\right\},$$

де B — замкнута одинична куля в X.

Наступний наслідок узагальнює відому поляризаційну нерівність (див., напр. [8]) для (p,q)-поліномів.

Наслідок 5.1. *Має місце наступна нерівність для норми (p,q)-лінійної симетричної форми і відповідного їй (p,q)-полінома:*

$$\|B_{p,q}\| \leq \frac{(p+q)^{p+q}}{p!q!}\|P_{p,q}\|.$$

Доведення. Нехай $x_1, \ldots, x_{p+q} \in B$. Використаємо формулу (4) і підставимо $x' = x'' = 0$:

$$\|B_{p,q}(x_1, \ldots, x_{p+q})\| = \left\|\frac{1}{p!q!2^{p+q}} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{p+q}=\pm 1} \varepsilon_1\ldots\varepsilon_{p+q} \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_m=0}^{1} \frac{1}{2^m}(r_1^{\mu_1}\ldots r_m^{\mu_m})^q \times \right.$$
$$\left. P_{p,q}\Big((\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p) + (r_1^{\mu_1}\ldots r_m^{\mu_m})(\varepsilon_{p+1}x_{p+1} + \ldots + \varepsilon_{p+q}x_{p+q})\Big)\right\| \leq \frac{2^{p+q}}{p!q!2^{p+q}} \times \frac{2^m}{2^m} \times$$
$$\left\|P_{p,q}\Big((\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p) + (r_1^{\mu_1}\ldots r_m^{\mu_m})(\varepsilon_{p+1}x_{p+1} + \ldots + \varepsilon_{p+q}x_{p+q})\Big)\right\| =$$
$$\frac{1}{p!q!} \times \left\|P_{p,q}\Big((p+q) \times \frac{(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p) + (r_1^{\mu_1}\ldots r_m^{\mu_m})(\varepsilon_{p+1}x_{p+1} + \ldots + \varepsilon_{p+q}x_{p+q})}{p+q}\Big)\right\| \leq \frac{(p+q)^{p+q}}{p!q!}\left\|P_{p,q}\right\|.$$

□

Наступний приклад показує, що у загальному випадку цю оцінку не можна покращити.

Приклад 5.1. *Нехай $X = \ell_1$ – простір всіх послідовностей комплексних чисел $x = (x_n)$ таких, що $\|x\| = \sum |x_n| < \infty$. Для $p > 0$, $q > 0$ візьмемо відображення $B : X^{p+q} \to \mathbb{C}$,*

$$B(x^1,\dots,x^p;x^{p+1},\dots,x^{p+q}) = x_1^1x_2^2\dots x_p^p\,\overline{x_{p+1}^{p+1}}\dots\overline{x_{p+q}^{p+q}}.$$

Проведемо симетризацію $B(x^1,\dots,x^{p+q})$ спочатку по перших p, а потім по наступних q змінних:

$$B_s(x^1,\dots,x^p;x^{p+1},\dots,x^{p+q}) = \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma_1\in S_p} x_1^{\sigma_1(1)}\dots x_p^{\sigma_1(p)}\sum_{\sigma_2\in S_q}\overline{x_{p+1}^{p+\sigma_2(1)}\dots x_{p+q}^{p+\sigma_2(q)}}.$$

Очевидно, що $B_s(x^1,\dots,x^p;x^{p+1},\dots,x^{p+q})$ є (p,q)-лінійним симетричним відображенням. Бачимо, що

$$\|B_s(x^1,\dots,x^p;x^{p+1},\dots,x^{p+q})\| \le$$
$$\frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma_1\in S_p}|x_1^{\sigma_1(1)}|\dots|x_p^{\sigma_1(p)}|\sum_{\sigma_2\in S_q}|x_{p+1}^{p+\sigma_2(1)}|\dots|x_{p+q}^{p+\sigma_2(q)}| \le \frac{1}{p!q!}\|x^1\|\dots\|x^{p+q}\|.$$

Отже, $\|B_s\| \le \frac{1}{p!q!}$. З іншого боку,

$$B_s(e^1,\dots,e^{p+q}) = \frac{1}{p!q!},$$

де

$$e^i = (\underbrace{0,\dots,0}_{i-1},1,0,\dots).$$

Звідси робимо висновок, що $\|B_s\| = 1/p!q!$.

Позначимо $\widehat{B}_s(x) = B_s(x,\dots,x)$. $\widehat{B}_s$ — це (p,q)-поліном, що відповідає B_s.

$$\widehat{B}_s(x) = x_1\dots x_p\overline{x_{p+1}}\dots\overline{x_{p+q}},$$

де $x = (x_1,\dots,x_{p+q},\dots)$. Оскільки середнє геометричне невід'ємних чисел завжди менше або дорівнює їх середньому арифметичному, то

$$\|\widehat{B}_s(x)\| = |x_1|\dots|\overline{x_{p+q}}| \le \frac{1}{(p+q)^{p+q}}(|x_1|+\dots+|x_{p+q}|)^{p+q}.$$

Отже, $\|\widehat{B}_s\| \le \frac{1}{(p+q)^{p+q}}$. Візьмемо $x = \Big(\underbrace{\frac{1}{p+q},\dots,\frac{1}{p+q}}_{p+q},0,\dots\Big)$. Тоді

$$\|\widehat{B}_s(x)\| = \frac{1}{(p+q)^{p+q}}.$$

Звідси маємо, що $\|\widehat{B}_s\| = \frac{1}{(p+q)^{p+q}}$, і, отже,

$$\|B_s\| = \frac{(p+q)^{p+q}}{p!q!}\|\widehat{B}_s\|.$$

Наведемо приклад (p,q)-лінійного симетричного відображення з простору ℓ_2, який показує, що в цьому випадку, на відміну від класичної поляризаційної нерівності у гільбертовому просторі, $\|B_{p,q}\| \ne \|P_{p,q}\|$.

Приклад 5.2. *Нехай $X = \ell_2$, $p > 1$, $q > 1$, $B_{p,q} : X^{p+q} \to \mathbb{C}$,*

$$B_{p,q}(x^1,\dots,x^p;x^{p+1},\dots,x^{p+q}) = x_1^1x_1^2\dots x_1^p\overline{x_2^{p+1}\dots x_2^{p+q}}.$$

$B_{p,q}$ є (p,q)-лінійним симетричним відображенням.

$$\|B_{p,q}(x^1,\dots,x^{p+q})\| = |x_1^1||x_1^2|\dots|x_1^p||\overline{x_2^{p+1}}|\dots|\overline{x_2^{p+q}}| =$$
$$\sqrt{|x_1^1|^2}\sqrt{|x_1^2|^2}\dots\sqrt{|x_1^p|^2}\sqrt{|x_2^{p+1}|^2}\dots\sqrt{|x_2^{p+q}|^2} \le \|x^1\|\|x^2\|\dots\|x^{p+q}\|,$$

$\|B_{p,q}\| \le 1$, $B_{p,q}(e^1,\dots,e^1;e^2,\dots,e^2) = 1$. Отже, $\|B_{p,q}\| = 1$. З іншого боку $\widehat{B}_{p,q}(x) = (x_1)^p(\overline{x_2})^q$ є (p,q)-поліномом і

$$\|\widehat{B}_{p,q}(x)\| = |x_1|^p|\overline{x_2}|^q = |x_1|^p|x_2|^q.$$

Тому

$$\|\widehat{B}_{p,q}\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|\widehat{B}_{p,q}(x)\| = \sup_{|x_1|^2+|x_2|^2\le 1}|x_1|^p|x_2|^q = \max_{0\le t\le 1} t^p\left(\sqrt{1-t^2}\right)^q.$$

Легко перевірити, що максимум функції

$$f(t) = t^p\left(\sqrt{1-t^2}\right)^q$$

досягається при

$$t = \sqrt{\frac{p}{p+q}} \in [0,1],$$

і

$$f\left(\sqrt{\frac{p}{p+q}}\right) = \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\sqrt{1-\frac{p}{p+q}}\right)^q = \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{q}{2}}.$$

Отже,

$$\|\widehat{B}_{p,q}\| = \frac{p^{p/2}q^{q/2}}{(p+q)^{\frac{p+q}{2}}}$$

і

$$\|B_{p,q}\| = \frac{(p+q)^{\frac{p+q}{2}}}{p^{p/2}q^{q/2}}\|\widehat{B}_{p,q}\|.$$

Література

1. Митрофанов М.А. *Аппроксимация непрерывных функций на комплексных банаховых пространствах* // Математические заметки. – 2009. – Т.86, Вип.4. – С. 557-570.
2. Aron R.M. and Globevnic J. *Analytic functions on c_0*, Revista Matematica, Madrid, **2** (1989), 27-34.
3. Aron R.M., Lacruz M., Ryan R.A., Tonge A.M. *The generalized Rademacher functions*, Note Math., **12** (1992), 15-22.

4. Chernega I. Zagorodnyuk A. *Generalization of the polarization formula for nonhomogeneous polynomials and analytic mappings on Banach spaces*, Topology (2009), to appear.
5. Dineen S. Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1999.
6. Martin R.S. *Contribution to the theory of functionals*, Ph.D. thesis, University of California, 1932.
7. Mazur S., Orlicz W. *Grundlegende eigenschaften der polynomischen operationen I, II*, Studia Math., **5** (1935), 50-68, 179-189.
8. Mujica J. Complex Analysis in Banach Spaces, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986.
9. Sarantopoulos I. *Estimates for polynomial norms on $L^p(\mu)$ spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **99**, 2 (1986), 263-271.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 2.09.2009

Vasylyshyn T.V., Zagorodnyuk A.V. *Polarization formula and polarization inequality for (p,q)-linear maps*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 128–144.

It is proved an analogues of polarization formula and polarization inequality and Martin's formula for (p,q)-linear maps on normed spaces.

Василишин Т.В., Загороднюк А.В. *Поляризационная формула и поляризационнос неравенство для (p,q)-линейных отображений // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 128–144.

В работе установлен аналог поляризационной формулы, поляризационного неравенства и формулы Мартина для (p,q)-линейных отображений на нормированых пространствах.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 517.524

Dmytryshyn R.I.

THE MULTIDIMENSIONAL g-FRACTION WITH NONEQUIVALENT VARIABLES CORRESPONDING TO THE FORMAL MULTIPLE POWER SERIES

Dmytryshyn R.I. *The multidimensional g-fraction with nonequivalent variables corresponding to the formal multiple power series*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 145–151.

In this paper we consider the multidimensional g-fraction with nonequivalent variables which is the generalization of the continued g-fraction. The correspondence between the formal multiple power series and the above mentioned fraction is studied.

Introduction

One of the methods of expanding the functions of multiple variables, given by the formal multiple power series (FMPS), into the branched continued fractions (BCF) is the construction of corresponding BCF [1, 3, 6, 9–12, 14].

Let
$$f_n(\mathbf{z}) = \frac{P_{m_n}(\mathbf{z})}{Q_{l_n}(\mathbf{z})}, \quad n \geq 1,$$
where $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, $N \in \mathbb{N}$, $P_{m_n}(\mathbf{z})$, $Q_{l_n}(\mathbf{z})$ are polynomials of degrees m_n and l_n respectively, be a sequence of the rational functions of multiple variables. The function $f_n(\mathbf{z})$ expands into FMPS in neighborhood of zero, if the denominator $Q_{l_n}(\mathbf{z})$ is not equal to zero in the point $\mathbf{z} = (0, 0, \ldots, 0)$.

The rational function $f_n(\mathbf{z})$ is called corresponding to FMPS
$$f(\mathbf{z}) = \sum_{|m(N)| \geq 0} a_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)},$$
where $m(N) = m_1, m_2, \ldots, m_N$ is multiindex, $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq i \leq N$, $|m(N)| = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$, $\mathbf{z}^{m(N)} = z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot z_N^{m_N}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, $a_{m(N)} \in \mathbb{C}$, with order of correspondence ν_n, if

2000 *Mathematics Subject Classification:* 11A55, 40A15, 11J70.
Key words and phrases: multidimensional g-fraction with nonequivalent variables, corresponding, multiple power series.

© Dmytryshyn R.I., 2009

the expansion $f_n(\mathbf{z})$ into FMPS coincides with $f(\mathbf{z})$ for all homogeneous polynomials to the degree $\nu_n - 1$ inclusively. The sequence $\{f_n(\mathbf{z})\}$ corresponds to FMPS, if

$$\lim_{n\to+\infty} \nu_n = +\infty.$$

The correspondence BCF to FMPS $f(\mathbf{z})$ means that the sequence of approximants of BCF corresponds to $f(\mathbf{z})$.

We consider the multidimensional g-fraction with nonequivalent variables

$$\frac{s_0}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}} = \cfrac{s_0}{1+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\cfrac{g_{i(1)}z_{i_1}}{1+\sum\limits_{i_2=1}^{i_1}\cfrac{g_{i(2)}(1-g_{i(1)})z_{i_2}}{1+\sum\limits_{i_3=1}^{i_2}\cfrac{g_{i(3)}(1-g_{i(2)})z_{i_3}}{1+\ddots}}}}, \tag{1}$$

where $s_0 > 0$, $i(k) = i_1, i_2, \ldots, i_k$ is multiindex, $0 < g_{i(k)} < 1$, $k \ge 1$, $1 \le i_n \le i_{n-1}$, $1 \le n \le k$, $i_0 = N$, $g_{i(0)} = 0$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, which is generalization of the continued g-fraction

$$\frac{s_0}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{n=1}^{\infty}\frac{g_n(1-g_{n-1})z}{1}} = \cfrac{s_0}{1+\cfrac{g_1 z}{1+\cfrac{g_2(1-g_1)z}{1+\cfrac{g_3(1-g_2)z}{1+\ddots}}}},$$

where $s_0 > 0$, $0 < g_n < 1$, $n \ge 1$, $g_0 = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

Continued g-fractions are used, in particular, for analytic extension of functions, for the finding of zeros, poles and domains of univalent for some analytic and meromorphic functions, for the solution of the power moment problem [13, 16, 17].

The first multidimensional generalization of continued g-fraction was considered in [2, 7], where the circular domain of convergence for suggested generalization was investigated. The convergence of multidimensional g-fractions is investigated in [4, 8, 9]. The algorithm for the expansion of the formal multiple power series into corresponding multidimensional g-fraction is constructed in [6, 9].

In the present paper we study the correspondence between the FMPS

$$\sum_{|m(N)|\ge 0} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)}, \tag{2}$$

where $s_{m(N)} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, and the multidimensional g-fraction with nonequivalent variables (1). We prove that the fraction (1) converges in the domain

$$D = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_k| < 1/N, \ 1 \le k \le N\} \tag{3}$$

to function $g(\mathbf{z})$, which is holomorphic in this domain. We also establish that the sum of FMPS (2), which corresponds to the multidimensional g-fraction with nonequivalent variables (1), has the same value as this fraction in domain (3).

1 THE CORRESPONDENCE BETWEEN THE FMPS AND BCF

The correspondence between the multidimensional g-fraction with nonequivalent variables (1) and the FMPS (2) means that the expansion of each nth approximant, $n \ge 1$, into the FMPS coincides with the given series for all homogeneous polynomials to the degree $\nu_n - 1$ inclusively. The ν_n is called the order of correspondence.

We introduce the notation for the remainders of fraction (1):

$$Q_{i(s)}^{(s)}(\mathbf{z}) = 1, \quad Q_{i(p)}^{(s)}(\mathbf{z}) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{r=p+1}^{s}\sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{g_{i(r)}(1-g_{i(r-1)})z_{i(r)}}{1},$$

where $s \ge 0$, $0 \le p \le s-1$, $1 \le i_k \le i_{k-1}$, $1 \le k \le p$, $i_0 = N$. Under this notation the following recurrent relations hold

$$Q_{i(p)}^{(s)}(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{g_{i(p+1)}(1-g_{i(p)})z_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{(s)}(\mathbf{z})}, \tag{4}$$

where $s \ge 0$, $0 \le p \le s-1$, $1 \le i_k \le i_{k-1}$, $1 \le k \le p$, $i_0 = N$.

Let

$$g_n(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{Q_{i(0)}^{(n-1)}(\mathbf{z})}$$

be nth approximant of BCF (1), $n \ge 1$.

Theorem 1. *For the multidimensional g-fraction with nonequivalent variables (1) there exists the unique formal multiple power series of form (2) to which this fraction will correspond. The order of correspondence is $\nu_n = n$.*

Proof. Since $Q_{i(r)}^{(s)}(\mathbf{0}) = 1$, where $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, for any multiindex $i(r)$, $s \ge 0$, $0 \le r \le s-1$, $1 \le i_k \le i_{k-1}$, $1 \le k \le r$, $i_0 = N$, then the fraction $1/Q_{i(r)}^{(s)}(\mathbf{z})$ has a formal expansion into FMPS of form (2).

Let for each index n, $n \ge 1$, the series

$$\sum_{|m(N)|\ge 0} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)}^{(n)} \mathbf{z}^{m(N)},$$

be a formal expansion of approximant $g_n(\mathbf{z})$ of BCF (1). Let $Q_{i(r)}^{(s)}(\mathbf{z}) \ne 0$ for all indices. Applying the method suggested in [1, p. 28] and recurrent relations (4), we find a formula for the difference of two approximants of BCF (1) for $m > n \ge 2$, namely

$$g_m(\mathbf{z}) - g_n(\mathbf{z}) = (-1)^n s_0 \sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{i_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{\prod\limits_{k=0}^{n} Q_{i(k)}^{(m-1)}(\mathbf{z}) \prod\limits_{k=0}^{n-1} Q_{i(k)}^{(n-1)}(\mathbf{z})}$$

From this formula we have

$$g_m(\mathbf{z}) - g_n(\mathbf{z}) = \sum_{|m(N)|\ge 0} (-1)^{|m(N)|}\left(s_{m(N)}^{(m)} - s_{m(N)}^{(n)}\right)\mathbf{z}^{m(N)}, \quad m > n \ge 2,$$

in neighborhood of zero.

Hence for each m, $m > n \ge 2$, the relations $s_{m(N)}^{(m)} = s_{m(N)}^{(n)}$ hold for any multiindex $m(N)$, $|m(N)| \le n-1$.

BCF (1) corresponds to FMPS

$$L(\mathbf{z}) = \sum_{|m(N)|\ge 0} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)}^{(|m(N)|+1)} \mathbf{z}^{m(N)},$$

since for $n \ge 2$

$$L(\mathbf{z}) - g_n(\mathbf{z}) = \sum_{|m(N)|\ge n} (-1)^{|m(N)|}\left(s_{m(N)}^{(|m(N)|+1)} - s_{m(N)}^{(n)}\right)\mathbf{z}^{m(N)}.$$

The unique implies that for arbitrary n, $n \ge 2$, the all coefficients $s_{m(N)}^{(n)}$ of the nth approximant $g_n(\mathbf{z})$ expansion of BCF (1) into FMPS by form (2) are uniquely determined. □

The following theorem deals with the convergence of corresponding multidimensional g-fraction with nonequivalent variables to FMPS.

Theorem 2. *The multidimensional g-fraction with nonequivalent variables* (1) *converges in the domain* (3) *to function $g(\mathbf{z})$ which is holomorphic in this domain. The sum of the formal multiple power series* (2), *which corresponds to the multidimensional g-fraction with nonequivalent variables* (1), *has the same value as this fraction in the domain* (3).

Proof. Using relations (4), by mathematical induction we show that the following inequalities are valid

$$\left|Q_{i(r)}^{(s)}(\mathbf{z})\right| > g_{i(r)}, \tag{5}$$

where $s \ge 1$, $1 \le r \le s$, $1 \le i_k \le i_{k-1}$, $1 \le k \le r$, $i_0 = N$.

For $r = s$ relations (5) are obvious. By induction hypothesis that (5) hold for $r = p+1$, where $p+1 \le s$, we prove (5) for $r = p$. Indeed, the implement of the relations (4) lead to

$$\left|Q_{i(p)}^{(s)}(\mathbf{z})\right| \ge 1 - \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{g_{i(p+1)}(1-g_{i(p)})|z_{i_{p+1}}|}{\left|Q_{i(p+1)}^{(s)}(\mathbf{z})\right|} > g_{i(p)}.$$

By virtue of estimates (5), $Q_{i(p+1)}^{(s)}(\mathbf{z}) \ne 0$. Therefore, replacing $g_{i(p+1)}$ by $\left|Q_{i(p+1)}^{(s)}(\mathbf{z})\right|$, inequalities (5) are obtained for $r = p$.

From relations (5) it follows, that $Q_{i(r)}^{(s)}(\mathbf{z}) \ne 0$ for all indices. Thus, the approximants $g_n(\mathbf{z})$, $n \ge 1$, of BCF (1) form the sequence of functions holomorphic in domain (3).

Let

$$D_c = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_k| < c/N, \ 1 \le k \le N\}, \quad 0 < c < 1. \tag{6}$$

be a domain contained in D. Applying relations (5), for the arbitrary $\mathbf{z} \in D_c$, $D_c \subset D$, we obtain for $n \ge 2$

$$|g_n(\mathbf{z})| = \frac{s_0}{\left|Q_{i(0)}^{(n-1)}(\mathbf{z})\right|} \le \frac{s_0}{1 - \sum\limits_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)}|z_{i_1}|}{\left|Q_{i(1)}^{(n-1)}(\mathbf{z})\right|}} < \frac{s_0}{1-c} = M(D_c),$$

where the constant $M(D_c)$ depends only on the domain D_c, i.e. the sequence $\{g_n(\mathbf{z})\}$ is uniformly bounded in the domain of form (6).

Let K be an arbitrary compact subset of domain (3). Let us cover K with the domain of form (6). From this cover we choose the finite subcover $\{D_{c_j}\}_{j=1}^{s}$. Let

$$M(K) = \max\{M(D_{c_j}) : \ 1 \le j \le s\}.$$

Then, taking into account $g_1(\mathbf{z}) = s_0$, for arbitrary $\mathbf{z} \in K$ we obtain

$$|g_n(\mathbf{z})| \le M(K)$$

for $n \ge 1$, i.e. the sequence $\{g_n(\mathbf{z})\}$ is uniformly bounded on each compact subset of the domain (3).

According to theorem 2 [5] BCF (1) converges in the domain

$$\Delta_r = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ |z_k| \le r < 1/(8N), \ 1 \le k \le N\}.$$

Evidently $\Delta_r \subset D$ for each r, $0 < r < 1/(8N)$, in particular, say $\Delta_{1/(9N)} \subset D$. Applying theorem 2.17 [1] we come to the conclusion that the multidimensional g-fraction with nonequivalent variables (1) converges uniformly on each compact subset of the domain (3) to function $g(\mathbf{z})$, which is to be holomorphic in this domain.

Now, we prove the second statement of this theorem. Since the sequence $\{g_n(\mathbf{z})\}$ converges uniformly on each compact subset of the domain D to function $g(\mathbf{z})$, which is holomorphic in D, then according to Weierstrass's theorem [15, p. 288] for arbitrary $|m(N)|$ we have

$$\frac{\partial^{|m(N)|} g_n(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^{m(N)}} \to \frac{\partial^{|m(N)|} g(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^{m(N)}},$$

where $\partial \mathbf{z}^{m(N)} = \partial z_1^{m_1} \partial z_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \partial z_N^{m_N}$, on each compact subset of the domain D. And now, according to theorem 1 the expansion of each approximant $g_n(\mathbf{z})$, $n \ge 1$, into FMPS coincides with series (2) for all homogeneous polynomials to the degree $n-1$ inclusively. Then for $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left.\frac{\partial^{|m(N)|} g_n(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^{m(N)}}\right|_{\mathbf{z}=0} = m(N)!(-1)^{|m(N)|} s_{m(N)},$$

where $m(N)! = m_1! m_2! \cdot \ldots \cdot m_N!$.

Hence,

$$g(\mathbf{z}) = \sum_{|m(N)|\geq 0} \frac{\partial^{|m(N)|} g(\mathbf{z})}{m(N)!\partial \mathbf{z}^{m(N)}}\bigg|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}} \mathbf{z}^{m(N)} = \sum_{|m(N)|\geq 0} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)}$$

for all $\mathbf{z} \in D$. $\square$

CONCLUSION

The question of the class of functions of multiple variables which are presented by the multidimensional g-fraction with nonequivalent variables remains open.

REFERENCES

1. Bodnar D.I. Branched continued fractions, Naukova Dumka, Kiev, 1986, 176 (in Russian).
2. Bodnar D.I. *The criteria of convergence of branched continued fractions with quotients of the form* $\frac{(1-g_{i_1,i_2,\ldots,i_k})\hat{g}_{i_1,i_2,\ldots,i_k} x_{i_1,i_2,\ldots,i_k}}{1}$, Mat. metody ta fiz.-mech. polya, **15** (1982), 30-35.
3. Bodnar D.I. *The multidimensional C-fractions*, Mat. metody ta fiz.-mech. polya, **39**, 3 (1996), 39-46.
4. Bodnar D.I., Dmytryshyn R.I. *On the convergence of multidimensional g-fraction*, Matematichni studii, **15**, 2 (2001), 115-126.
5. Bodnar D.I., Dmytryshyn R.I. *On some convergence criteria for branched continued fractions with nonequivalent variables*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech-Mat., **68** (2008), 22-30.
6. Bodnar D.I., Dmytryshyn R.I. *Two-dimensional generalization of Bauer's g-algorithm*, Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2 (2006), 13-18.
7. Bodnar D.I., Kuchminska Kh. Yo. *The absolute convergence of even and odd part of two-dimensional corresponding continued fraction*, Mat. metody ta fiz.-mech. polya, **18** (1983), 30-34.
8. Dmytryshyn R.I. *An efficient convergence test of a branched continued fraction with nonequivalent variables*, Naukovy Visnyk Chernivetskogo Universitetu: Zbirnyk Naukovyh Prats, Vyp.374, Matematyka (2008), 44-49.
9. Dmytryshyn R.I. *The multidimensional generalization of g-fractions and their application*, J. Comp. and Appl. Math., **164**-**165** (2004), 265-284.
10. Cuyt A., Verdonk B. *A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximations*, Appl. Numer. Math., **4** (1988), 263-271.
11. Kuchminska Kh.Yo. *Corresponding and branched continued fractions for double power series*, Dop. AN URSR. Ser. A., 7 (1978), 614-617.
12. Murphy J.F., O'Donohoe M.R. *A two-variable generalisation of the Stieltjes-type continued fractions*, J. Comp. and Appl. Math., **4**, 3 (1978), 181-190.
13. Runckelb H.-J. *Bounded analytic functions in the unit disk and the behaviour of certain analytic continued fractions near the singular line*, J. reine angew. Math., **281** (1976), 97-125.
14. Siemaszko W. *Branched continued fractions for double power series*, J. Comp. and Appl. Math., **6**, 2 (1980), 121-125.
15. Shabat B.V. Introduce in the complex analyse, Nauka, Moskow, 1969, 576 (in Russian).

16. Thale J.S. *Univalence of continued fractions and Stieltjes transforms*, Proc. Amer. Math. Soc., **7**, 2 (1956), 232-244.
17. Wall H.S. Analytic theory of continued fractions, Van Nostrand, New York, 1948, 433.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
Ivano-Frankivsk, Ukraine.

Received 6.10.2009

Дмитришин Р.І. *Багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними, відповідний до формального кратного степеневого ряду // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 145–151.

У статті розглянуто багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними, який є узагальненням неперервного g-дробу. Досліджено відповідність між формальним кратним степеневим рядом і багатовимірним g-дробом з нерівнозначними змінними.

Дмитришин Р.И. *Многомерная g-дробь с неравноправными переменными, соответствующая формальному кратному степенному ряду // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 145–151.

В статье рассмотрена многомерная g-дробь с неравноправными переменными, которая является обобщением непрерывной g-дроби. Исследовано соответствие между формальным кратным степенным рядом и многомерной g-дробью с неравноправными переменными.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 517.53

Задорожна О.Ю., Скасків О.Б.

ПРО СПРЯЖЕНІ АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ КРАТНОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

Задорожна О.Ю., Скасків О.Б. *Про спряжені абсциси збіжності кратного ряду Діріхле // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 152-160.

Для кратних рядів Діріхле $F(s) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_{(n)} \exp\{(\lambda_{(n)}, s)\}$ встановлено зв'язки між областями збіжності G_c, абсолютної збіжності G_a та областями існування максимального члена G_μ у вигляді таких співвідношень: $\gamma G_c \subset G_a + \delta_0 e_1$, $\gamma G_\mu \subset G_a + \delta_0 e_1$, де $e_1 = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^p$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$ за умови $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty} \frac{(\gamma-1)\ln|a_{(n)}|+\delta_0\|\lambda_{(n)}\|}{\ln\|n\|} > p$ та $\gamma G_c \subset G_a + \delta$; $\gamma G_\mu \subset G_a + \delta$ за умови $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty} \frac{(\gamma-1)\ln|a_{(n)}|+(\delta\,\lambda_{(n)})}{\ln n_1+...+\ln n_p} > 1$.

Вступ.

Нехай $(\lambda_n^{(i)}), 0 \le \lambda_1^{(i)} < \lambda_2^{(i)} < ... \ (i \in \{1, 2, \dots, p\})$, – зростаючі до $+\infty$ послідовності невід'ємних чисел, $\lambda_0^{(i)} = 0$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Розглянемо кратний ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_{(n)} \exp\{(\lambda_{(n)}, s)\}, \tag{1}$$

де $(a_{(n)})$ – послідовність комплексних чисел; $(n) = (n_1, n_2, ..., n_p)$, $n_i \in \mathbb{Z}_+ \overset{def}{=} \mathbb{N} \cup \{0\}$, $(i \in \{1, ..., p\})$; $\|n\| = n_1 + ... + n_p; s = (s_1, s_2, ..., s_p) \in \mathbb{C}^p$; $s_j = \sigma_j + it_j$ $(j \in \{1, ..., p\})$; $(\lambda_{(n)}, s) = \lambda_{n_1}^{(1)} s_1 + ... + \lambda_{n_p}^{(p)} s_p$.

Збіжність кратних рядів Діріхле досліджувалась в [3]–[9]. А.Янушаускас [8] у випадку $p = 2$ (загальний випадок розглядається цілком подібно), зокрема довів, що якщо ряд (1) збіжний в околі точки $(\sigma_1^0 + it_1^0, ..., \sigma_p^0 + it_p^0) \in \mathbb{C}^p$, то він збіжний у прямому добуткові півплощин $\{s_j : \operatorname{Re} s_j < \sigma_j^0\}$, $j \in \{1, ..., p\}$, причому збіжність є рівномірною на кожному компакті з цього прямого добутку. Тому для кожного кратного ряду Діріхле можливі три ситуації: 1) ряд збіжний для всіх $s = (s_1 \dots, s_p) \in \mathbb{C}^p$; 2) ряд не збігається у жодній області з $\mathbb{C}^p$; 3) ряд збіжний в області $\{(s_1, ..., s_p) : \operatorname{Re} s_k < \sigma_{ck}, k \in \{1, \dots, p\}\}$ і кожна з областей вигляду $\{(s_1, ..., s_p) : \operatorname{Re} s_k < \sigma_k^0\}$, для якої $\sigma_i^0 > \sigma_{ci}$, $i \in I$ і $\sigma_j^0 \ge \sigma_{cj}$, $j \in J$, де $I \cup J = \{1, ..., p\}$, містить точки, у яких ряд розбіжний. Числа σ_{c1},...,σ_{cp} називаються

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.
Ключові слова і фрази: кратний ряд Діріхле, спряжені абсциси збіжності кратного ряду Діріхле.

© Задорожна О.Ю., Скасків О.Б., 2009

[8] спряженими абсцисами збіжності ряду (1). Безпосередньо з означення випливає, що край області збіжності ряду задається рівнянням

$$F(\operatorname{Re} s_1, ..., \operatorname{Re} s_p) = 0.$$

У [1] досліджено абсолютну збіжність ряду (1) за умови

$$\tau_0 \overset{def}{=} \varlimsup_{\|n\|\to\infty} \frac{\ln\|n\|}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0, \tag{2}$$

де $\|\lambda_{(n)}\| = \lambda_{n_1}^{(1)} + ... + \lambda_{n_p}^{(p)}$. Зокрема показано, що якщо кратний ряд Діріхле абсолютно збіжний в околі точки $s^0 \in \mathbb{C}^p$, то він збіжний абсолютно в області $\{s \in \mathbb{C}^p : \ Res_j < Res_j^0\}$. Тому $\mathbb{R}^p$ ділиться на дві частини: до однієї з них належать точки $(\sigma_1, ..., \sigma_p)$, які є абсцисами точок абсолютної збіжності ряду (1), а до іншої – точки $(\sigma_1, ..., \sigma_p)$, які є абсцисами точок, у яких ряд (1) не є абсолютно збіжним. Поверхня θ, що ділить $\mathbb{R}^p$ на такі множини, називається *гіперповерхнею спряжених абсцис* абсолюної збіжності ряду (1), а координати її точок $(\sigma_{a1}, ..., \sigma_{ap})$ називаються *спряженими абсцисами* абсолютної збіжності цього ряду.

В [1], крім того доведено, що за умови (2), для того, щоб точка $\sigma_a = (\sigma_{a_1}, ..., \sigma_{a_p}) \in \mathbb{R}^p$ була точкою на гіперповерхні спряжених абсцис абсолютної збіжності кратного ряду Діріхле (1), необхідно і досить, щоб

$$\varlimsup_{\|n\|\to\infty} \frac{\ln|a_{(n)}| + (\sigma_a, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0. \tag{3}$$

А у статті [8] за умови (2) доведено, що якщо існують числа $\rho_i \le 0, i \in \{1, ..., p\}$, такі що $\sum\limits_{i=0}^{p} \rho_i^2 > 0$,

$$\varlimsup_{\|n\|\to\infty} \frac{\ln \widehat{A}_{(n)}}{-(\rho, \lambda_{(n)})} = 1,$$

де $\widehat{A}_{(n)} = \sum\limits_{k_1=0}^{n_1} ... \sum\limits_{k_p=0}^{n_p} |a_{(k)}|$, то область збіжності кратного ряду Діріхле (1) збігається з областю його абсолютної збіжності.

У статті [6] отримано певне узагальнення формули Валірона для знаходження абсцис збіжності рядів Діріхле від однієї змінної, а також встановлено зв'язки абсцис збіжності з абсцисами існування максимального члена ряду Діріхле. У статті [4] результати з [6] перенесно на випадок подвійного ряду Діріхле. У даній статті встановлено p–вимірні $(p > 2)$ аналоги тверджень зі статей [6], [4].

1 Абсциси існування максимального члена.

Спочатку опишемо умови, за яких існує максимальний член

$$\mu(\sigma) = \mu(\sigma_1, ..., \sigma_p) = \max\{|a_{(n)}| \exp(\lambda_{(n)}, s) \colon (n) \in \mathbb{Z}_+^p\}$$

кратного ряду Діріхле (1), тобто $\mu(\sigma) < +\infty$. Позначимо через $G_\mu = \{\sigma \in \mathbb{R}^p : \mu(\sigma) < +\infty\}$ область існування максимального члена. Зауважимо, що якщо $\mu(\sigma^0) < +\infty$, то $\mu(\sigma) < +\infty$ за умов $\sigma_i \leq \sigma_i^0$ $(i \in \{1,\dots,p\})$. Звідси випливає, що є три можливості: 1) $\mu(\sigma) = +\infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$; 2) $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$; 3) $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma_i < \sigma_{\mu i}$ $(i \in \{1,\dots,p\})$ і $\mu(\sigma^*) = +\infty$, якщо $\sigma_i^* > \sigma_{\mu i}$, $i \in I$ та $\sigma_j^* \geq \sigma_{\mu j}$, $j \in J$, де $I \cup J = \{1,...,p\}$, $I \cap J = \varnothing$. Систему $\sigma_\mu = (\sigma_{\mu 1},...,\sigma_{\mu p})$ будемо називати системою *спряжених абсцис існування* максимального члена. Зрозуміло, що у випадку їх скінченності існує функціональна залежність $F_3(\sigma_{\mu 1},...,\sigma_{\mu p}) = 0$, а у випадку, коли $\mu(\sigma) < +\infty$ не для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$ і $\sigma_{\mu i} = +\infty$, $i \in I$, то $\sigma_{\mu j} = \mathrm{const}$, $j \in J$.

Твердження 1.1. *Множина G_μ – опукла.*

Доведення. Справді, нехай $\sigma^1, \sigma^2 \in G_\mu$, тобто $\mu(\sigma^1) < +\infty$, $\mu(\sigma^2) < +\infty$. Оскільки $A^\theta B^{1-\theta} \leq (A+B)^\theta (A+B)^{1-\theta} = A + B$ для $A \geq 0$, $B \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 1$, то

$$|a_{(n)}| \exp\{(\theta\sigma^1 + (1-\theta)\sigma^2, \lambda_{(n)})\} =$$

$$[|a_{(n)}| \exp\{(\sigma^1, \lambda_{(n)})\}]^\theta [|a_{(n)}| \exp\{(\sigma^2, \lambda_{(n)})\}]^{1-\theta} \leq$$
$$|a_{(n)}| \exp\{(\sigma^1, \lambda_{(n)})\} + |a_{(n)}| \exp\{(\sigma^2, \lambda_{(n)})\},$$

тобто $\mu(\theta\sigma^1 + (1-\theta)\sigma^2) \leq \mu(\sigma^1) + \mu(\sigma^2) < +\infty$. Це означає, що разом з двома точками σ^1 і σ^2 множині G_μ належить і весь відрізок, що їх сполучає. □

Твердження 1.2. *Система $\sigma_\mu = (\sigma_{\mu 1},...,\sigma_{\mu p})$ дійсних чисел є системою спряжених абсцис існування максимального члена тоді і тільки тоді, коли*

$$\overline{\lim_{\|n\|\to\infty}} \frac{\ln|a_{(n)}| + (\sigma_\mu, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0. \tag{4}$$

Доведення. Позначимо через A ліву частину рівності (4) і нехай $\sigma_\mu = (\sigma_{\mu 1},...,\sigma_{\mu p})$ є спряженими абсцисами існування максимального члена. Тоді

$$|a_{(n)}| \exp\{(\sigma, \lambda_{(n)})\} \leq \mu(\sigma) < +\infty$$

для всіх $(n) \in \mathbb{Z}_+^p$ і для будь-яких $\sigma_i < \sigma_{\mu i}$ $(i \in \{1,\dots,p\})$. Тому

$$A \leq \overline{\lim_{\|n\|\to\infty}} \frac{\ln\mu(\sigma) + (\sigma_\mu - \sigma)\lambda_{(n)}}{\|\lambda_{(n)}\|} \leq \max\{\sigma_{\mu i} - \sigma_i : i \in \{1,\dots,p\}\},$$

і з огляду на довільність $\sigma_i < \sigma_{\mu i}$ $(i \in \{1,\dots,p\})$ отримуємо нерівність $A \leq 0$.

Покажемо, що $A = 0$. Справді, якщо $A < 0$, то для будь-якого $\eta \in (A, 0)$ і всіх досить великих $n_1 + n_2 + ... + n_p$ правильна нерівність $\ln|a_{(n)}| + (\sigma_\mu, \lambda_{(n)}) \leq \eta\|\lambda_{(n)}\|$, звідки $|a_{(n)}| \exp\{(\sigma_\mu - \eta e_1, \lambda_{(n)})\} \leq 1$, де $e_1 = (1,...,1) \in \mathbb{R}^p$. Тобто $\mu(\sigma_\mu + |\eta| e_1) < +\infty$ і система $(\sigma_{\mu 1},...,\sigma_{\mu p})$ не є системою спряжених абсцис існування максимального члена. Необхідність умови (4) доведено.

Доведемо достатність умови (4). Для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх досить великих $n_1 + ... + n_p$ маємо $\ln|a_{(n)}| + (\sigma_\mu, \lambda_{(n)}) \leq \varepsilon\|\lambda_{(n)}\|$, тобто $\mu(\sigma_\mu - \varepsilon e_1) < +\infty$ і, завдяки довільності $\varepsilon > 0$, отримуємо $\mu(\sigma) < +\infty$ для будь-яких $\sigma_i < \sigma_{\mu i}, i \in \{1,\dots,p\}$.

З іншого боку, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує підпослідовність $\widehat{n} = (\widehat{n}_1,...,\widehat{n}_p)$ така, що $|\widehat{n}| \to \infty$ і $\ln|a_{(\widehat{n})}| + (\sigma_\mu, \lambda_{(\widehat{n})}) \geq -(\varepsilon/2)\|\lambda_{(\widehat{n})}\|)$. Тому

$$|a_{(\widehat{n})}| \exp\{(\sigma_\mu + \varepsilon e_1, \lambda_{(\widehat{n})})\} \geq \exp\{(\varepsilon/2)\|\lambda_{(\widehat{n})}\|\} \to +\infty, \quad |\widehat{n}| \to \infty,$$

тобто $\mu(\sigma_\mu + \varepsilon e_1) = +\infty$. Завдяки довільності ε достатність умови (4) і, отже, твердження 1.2 доведено. □

Наслідок 1.1. *Система $\sigma_\mu = (\sigma_{\mu 1},...,\sigma_{\mu p})$ невід'ємних чисел, принаймні одне з яких додатне, є системою спряжених абсцис існування максимального члена тоді і тільки тоді, коли*

$$\underline{\lim_{\|n\|\to\infty}} \frac{\ln(1/|a_{(n)}|)}{(\sigma_\mu, \lambda_{(n)})} = 1, \tag{5}$$

а система $\sigma_\mu = (\sigma_{\mu 1},...,\sigma_{\mu p})$ недодатних чисел, принаймні одне з яких від'ємне, є спряженими абсцисами існування максимального члена тоді і тільки тоді, коли

$$\overline{\lim_{\|n\|\to\infty}} \frac{\ln(1/|a_{(n)}|)}{(\sigma_\mu, \lambda_{(n)})} = 1. \tag{6}$$

Доведення. Міркуємо подібно до [4]. Доведемо тільки першу частину наслідку, позаяк друга частина доводиться подібно. Припустимо, що $\min\{\sigma_{\mu i} : i \in \{1,\dots,p\}\} > 0$. Останнє припущення, очевидно, не зменшує загальності міркувань. Рівність (4) можна подати у вигляді

$$\underline{\lim_{\|n\|\to\infty}} \frac{\ln(1/|a_{(n)}|) - (\sigma_\mu, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0, \tag{7}$$

тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх досить великих $n_1 + ... + n_p$ маємо $\ln(1/|a_{(n)}|) \geq (\sigma_\mu, \lambda_{(n)}) - \varepsilon\|\lambda_{(n)}\|$ і, отже,

$$\frac{\ln(1/|a_{(n)}|)}{(\sigma_\mu, \lambda_{(n)})} \geq 1 - \frac{\varepsilon\|\lambda_{(n)}\|}{(\sigma_\mu, \lambda_{(n)})} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{\min\{\sigma_{\mu i} : i \in \{1,\dots,p\}\}},$$

а для деякої підпослідовності $(\widehat{n})$, такої що $|\widehat{n}| \to \infty$, подібно отримуємо

$$\frac{\ln(1/|a_{\widehat{n}}|)}{(\sigma_\mu, \lambda_{(\widehat{n})})} \leq 1 + \frac{\varepsilon|\lambda_{(\widehat{n})}|}{(\sigma_\mu, \lambda_{(\widehat{n})})} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{\min\{\sigma_{\mu i} : i \in \{1,\dots,p\}\}}.$$

З огляду на довільність ε ці нерівності рівносильні до рівності (5). □

Твердження 1.3. *Для того, щоб $\mu(\sigma) = \mu(\sigma_1,...,\sigma_p) < +\infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$, необхідно і досить, щоб*

$$\lim_{\|n\|\to\infty} \frac{1}{\|\lambda_{(n)}\|} \ln\frac{1}{|a_{(n)}|} = +\infty. \tag{8}$$

Доведення. Якщо $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $(\sigma_1,...,\sigma_p) \in \mathbb{R}^p$, то для кожного $\sigma > 0$ правильна нерівність $|a_{(n)}| \exp\{\sigma\|\lambda_{(n)}\|\} \leq \mu(\sigma e_1) < +\infty$, тобто $\frac{1}{\|\lambda_{(n)}\|} \ln\frac{1}{|a_{(n)}|} \geq \sigma + o(1)$, $\|n\| \to \infty$, і з огляду на довільність σ правильна рівність (8). Навпаки, з умови (8) випливає, що для кожного $\sigma > 0$ і всіх досить великих $n_1 + ... + n_p$ правильна нерівність $\frac{1}{\|\lambda_{(n)}\|} \ln \frac{1}{|a_{(n)}|} \geq \sigma$. Тому, якщо $\sigma^0 = (\sigma_1^0, ..., \sigma_p^0) \in \mathbb{R}^p$, то, вибираючи $\sigma > \max\{\sigma_i^0 : i \in \{1, \dots, p\}\}$, маємо

$$|a_{(n)}| \exp\{(\sigma^0, \lambda_{(n)})\} \leq \exp\{-(\sigma e_1 - \sigma^0, \lambda_{(n)})\} \to 0, \quad \|n\| \to \infty,$$

тобто $\mu(\sigma^0) < +\infty$. Твердження 3 доведено. □

Теорема 1. *Для того, щоб $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma_i < +\infty$ і $\sigma_j < \sigma_{\mu j} < +\infty$, де $i \in I, j \in J$ та $I \sqcup J = \{1, .2, ..., p\}$, $I \neq \varnothing$, необхідно і досить, щоб для кожного $\sigma_j^* < \sigma_{\mu j}$*

$$\lim_{\|n\| \to +\infty} \frac{\ln(1/|a_{(n)}|) - \sum_{j \in J} \sigma_j^* \lambda_{n_j}^{(j)}}{\sum_{i \in I} \lambda_{n_i}^{(i)}} = +\infty. \tag{9}$$

Доведення. Якщо $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma_i < +\infty, i \in I$, і $\sigma_j < \sigma_{\mu j} < +\infty, j \in J$, то для довільних $\sigma_j^* < \sigma_{\mu j}$ і $\sigma_i < +\infty$ правильна нерівність

$$\frac{\ln(1/|a_{(n)}|) - \sum_{j \in J} \sigma_j^* \lambda_{n_j}^{(j)}}{\sum_{i \in I} \lambda_{n_i}^{(i)}} \geq \frac{-\ln \mu(\sigma)}{\sum_{i \in I} \lambda_{n_i}^{(i)}} + \min\{\sigma_i : i \in I\},$$

де σ – це набір, де на i-тих місцях стоять координати $\sigma_i, i \in I$, а на j-тих – координати $\sigma_j^*, j \in J$, звідки, з огляду на довільність $\sigma_i, i \in I$, отримуємо (9).

Навпаки, з умови (9) випливає, що для довільних $\sigma_i^* < +\infty$ та $\sigma_j^* < \sigma_{\mu j}$ і всіх досить великих $n_1 + ... + n_p$ правильна нерівність $|a_{(n)}| \leq \exp\{-(\sum_{i \in I} \sigma_i^* \lambda_{n_i}^{(i)} + \sum_{j \in J} \sigma_j^* \lambda_{n_j}^{(j)})\}$, тобто для довільних $\sigma_i < \sigma_i^*, i \in I$, та $\sigma_j < \sigma_j^*, j \in J$,

$$|a_{(n)}| \exp\{\sum_{i \in I} \sigma_i \lambda_{n_i}^{(i)} + \sum_{j \in J} \sigma_j \lambda_{n_j}^{(j)}\} \leq$$

$$\exp\{-\sum_{i \in I} (\sigma_i^* - \sigma_i) \lambda_{n_i}^{(i)} - \sum_{j \in J} (\sigma_j^* - \sigma_j) \lambda_{n_j}^{(j)}\} \to 0 \quad (\|n\| \to +\infty),$$

і, отже, $\mu(\sigma) < +\infty$. З огляду на довільність $\sigma_i^* < +\infty, i \in I$, та $\sigma_j^* < \sigma_{\mu j}, j \in J$, теорему 1 доведено. □

2 Абсциси збіжності.

Нехай $\mathbf{G}_c, \mathbf{G}_a$ – відповідно області збіжності та абсолютної збіжності ряду (1), а $G_c = \{x \in \mathbb{R}^p : \ x = Re\ z, \ z \in \mathbf{G}_c\}$, $G_a = \{x \in \mathbb{R}^p : \ x = Re\ z, \ z \in \mathbf{G}_a\}$ – їхні сліди в $\{x \in \mathbb{R}^p : x = Re\ z, \ z \in \mathbb{C}^p\}$. Через G_μ позначимо область існування максимального члена $\mu(x, F)$ ряду (1). Зрозуміло, що якщо ряд (1) збіжний у точці $(\sigma + it) = (\sigma_1 + it_1, ..., \sigma_p + it_p)$, то $|a_{(n)}| \exp\{(\sigma, \lambda_{(n)})\} \to 0, \ \|n\| \to \infty$ і, отже, $\mu(\sigma) < +\infty$. Тому $G_a \subset G_c \subset G_\mu$.

З іншого боку, для $\gamma > 0$, $\delta_0 \subset \mathbb{R}$, $\delta = (\delta_1, ..., \delta_p) \in \mathbb{R}^p$ позначимо

$$h_1(\gamma; \delta_0) = \varliminf_{\|n\| \to \infty} \frac{(\gamma - 1) \ln |a_{(n)}| + \delta_0 \|\lambda_{(n)}\|}{\ln \|n\|},$$

$$h_2(\gamma; \delta) = \varliminf_{\|n\| \to \infty} \frac{(\gamma - 1) \ln |a_{(n)}| + (\delta, \lambda_{(n)})}{\ln n_1 + ... + \ln n_p},$$

і доведемо таку теорему.

Теорема 2. *i). Якщо існують $\gamma > 0$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$ такі, що $h_1(\gamma; \delta_0) > p$, то $\gamma G_c \subset G_a + \delta_0 e_1$ і $\gamma G_\mu \subset G_a + \delta_0 e_1$, де $e_1 = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^p$.*
ii). Якщо існують $\gamma > 0$, $\delta \in \mathbb{R}^p$ такі, що $h_2(\gamma; \delta) > 1$, то $\gamma G_c \subset G_a + \delta$; $\gamma G_\mu \subset G_a + \delta$.

Доведення. i). Якщо довести, що $\gamma G_\mu \subset G_a + \delta_0 e_1$, то, оскільки $G_c \subset G_\mu$, звідси негайно отримаємо, що $\gamma G_c \subset G_a + \delta_0 e_1$. Отже, нехай $(\sigma_{\mu 1}, \dots, \sigma_{\mu p}) \in G_\mu$. Для довільного $\varepsilon > 0$ позначимо $\sigma_i^0 = \gamma \sigma_{\mu i} - \delta_0 - \varepsilon, \quad i \in \{1, \dots, p\}$, $\sigma^0 = (\sigma_1^0, \dots, \sigma_p^0)$. Зауважимо, що для цього ж $\varepsilon > 0$ з (4) отримуємо

$$\frac{\ln |a_{(n)}| + (\sigma_\mu, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} < \varepsilon / \gamma, \quad \|n\| \geq s_0.$$

Дослідимо абсолютну збіжність ряду (1) у точці $\sigma^0 = (\sigma_1^0, \dots, \sigma_p^0)$. Для будь-якого $\varepsilon_1 \in (0, \ h_1(\gamma, \ \delta_0) - p)$ і для всіх $\|n\| \geq s_1 \geq s_0$ послідовно отримуємо

$$|a_{(n)}| \exp\{(\sigma^0, \lambda_{(n)})\} = \exp\{-((\gamma - 1) \ln |a_{(n)}| + \delta_0 \|\lambda_{(n)}\|)\} \times$$

$$\exp\left\{\gamma\Big(\ln |a_{(n)}| + (\frac{\sigma^0 + \delta_0 e_1}{\gamma}, \lambda_{(n)})\Big)\right\} \leq$$

$$\exp\left\{ - (h_1(\gamma, \delta_0) - \varepsilon_1) \ln \|n\| + \gamma\big(\ln |a_{(n)}| + (\sigma_\mu, \lambda_{(n)}) - \frac{\varepsilon}{\gamma} \|\lambda_{(n)}\|\big)\right\} <$$

$$\exp\left\{ - (h_1(\gamma, \delta_0) - \varepsilon_1) \ln \|n\|\right\}.$$

Оскільки (див. [7, с.58]) кількість цілих невід'ємних розв'язків рівняння $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = s$ дорівнює C_{p+s-1}^s $(C_{p+s-1}^s \leq 2s^{p-1}, \ s \geq 1)$, то

$$\sum_{\|n\| = s_1}^{+\infty} |a_{(n)}| \exp\{(\sigma^0, \lambda_{(n)}\} = \sum_{s = s_1}^{+\infty} \sum_{\|n\| = s} |a_{(n)}| \exp\{(\sigma^0, \lambda_{(n)}\} \leq$$

$$2 \sum_{s = s_1}^{+\infty} \exp\{-(h_1(\gamma, \ \delta_0) - p + 1 - \varepsilon_1) \ln s\} < +\infty,$$

позаяк $h_1(\gamma, \delta_0) - p - \varepsilon_1 > 0$. Звідси випливає, що

$$G_a \supset \gamma G_\mu - (\delta_0 + \varepsilon) e_1,$$

звідки, завдяки довільності $\varepsilon > 0$, отримуємо потрібне вкладення.

ii). Як і у доведенні п.i) досить лише довести, що $\gamma G_\mu \subset G_a + \delta$. Нехай $\sigma_\mu \in G_\mu$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\sigma_{\mu i} > -\infty$ $(i \in \{1, \dots, p\})$. Припустимо спочатку, що $\sigma_{\mu i} < +\infty$ $(i \in \{1, \dots, p\})$. Тоді з (4) для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх досить великих $n_1 + ... + n_p$ отримуємо нерівність $|a_{(n)}| \leq \exp\{-(\sigma_\mu - \varepsilon e_1, \lambda_n)\}$. Застосовуючи останню нерівність та означення $h_2(\gamma, \delta)$, послідовно отримуємо

$$|a_{(n)}| \exp\{(\gamma(\sigma_\mu - \varepsilon e_1) - \delta, \lambda_{(n)})\} = \Big(|a_{(n)}| \exp\{(\sigma_\mu - \varepsilon e_1, \lambda_{(n)})\}\Big)^\gamma |a_{(n)}|^{1-\gamma} \exp\{-(\delta, \lambda_{(n)})\} \leq$$

$$|a_{(n)}|^{1-\gamma}\exp\{-(\delta,\lambda_{(n)})\}\le \exp\{-(h_2(\gamma;\delta)-\varepsilon)(\ln n_1+...+\ln n_p)\},$$

і, отже, ряд (1) абсолютно збіжний в точці $(\gamma(\sigma_\mu-\varepsilon e_1)-\delta)$, тобто $G_a\supset\gamma(G_\mu-\varepsilon e_1)-\delta$. З огляду на довільність $\varepsilon>0$ твердження п.*ii*) теореми 2 у випадку, коли $\sigma_{\mu i}<+\infty$ ($i\in\{1,\dots,p\}$), доведено.

Нехай тепер $\sigma_{\mu i}=+\infty$ ($i\in\{1,\dots,p\}$). За твердженням 1.3 правильна рівність (8), тобто $|a_{(n)}|\le\exp\{-\sigma(\|\lambda_{(n)}\|)\}$ для будь-якого $\sigma>0$ і всіх досить великих $n_1+...+n_p$. Звідси, як і вище, отримуємо нерівність

$$|a_{(n)}|\exp\{(\gamma\sigma e_1-\delta,\lambda_{(n)})\}\le$$

$$|a_{(n)}|^{1-\gamma}\exp\{-(\delta,\lambda_{(n)})\}\le\exp\{-(h_2(\gamma;\delta)-\varepsilon)(\ln n_1+...+\ln n_p)\},$$

звідки випливає, що $\sigma_{ai}\ge\gamma\sigma-\delta_i$, ($i\in\{1,\dots,p\}$)} для будь-якого $\sigma>0$, і, отже, $\sigma_{ai}=+\infty$, ($i\in\{1,..,p\}$).

Нарешті, якщо $\sigma_{\mu i}=+\infty$, $i\in I$ і $\sigma_{\mu j}<+\infty$, $j\in J$, де $I\sqcup J=\{1,...,p\}$, $I\ne\varnothing$, то з (9) для довільних $\sigma_i^*<+\infty$ та $\sigma_j^*<\sigma_{\mu j}$ і всіх досить великих $n_1+...+n_p$ маємо нерівність $|a_{(n)}|\le\exp\{-(\sum\limits_{i\in I}\sigma_i^*\lambda_{n_i}^{(i)}+\sum\limits_{j\in J}\sigma_j^*\lambda_{n_j}^{(j)})\}$. Тому, як і вище, отримуємо нерівність

$$|a_{(n)}|\exp\{\sum_{i\in I}(\gamma\sigma_i^*-\delta_i)\lambda_{n_i}^{(i)}+\sum_{j\in J}(\gamma\sigma_j^*-\delta_j)\lambda_{n_j}^{(j)}\}\le$$

$$|a_{(n)}|^{1-\gamma}\exp\{-(\delta,\lambda_{(n)})\}\le\exp\{-(h_2(\gamma;\delta))-\varepsilon)(\ln n_1+...+\ln n_p)\},$$

а з неї випливає, що $\sigma_{ai}\ge\gamma\sigma_i^*-\delta_i$, $i\in I$ і $\sigma_{aj}\ge\gamma\sigma_j^*-\delta_j$, $j\in J$ для будь-яких $\sigma_i^*<+\infty$ та $\sigma_j^*<\sigma_{\mu j}$, тобто $\sigma_{ai}=+\infty$, $i\in I$ і $\sigma_{aj}\ge\gamma\sigma_{\mu j}-\delta_j$, $j\in J$. Теорему 2 повністю доведено. □

Наслідок 2.1. *Нехай $\tau=(\tau_1,...,\tau_p)$ – система додатних чисел. Якщо*

$$\overline{\lim_{\|n\|\to+\infty}}\frac{\ln n_1+...+\ln n_p}{(\tau,\lambda_{(n)})}\le 1, \tag{10}$$

то $G_a\supset G_c-\tau$, $G_a\supset G_\mu-\tau$.

Справді, з (10) випливає, що $\ln n_1+...+\ln n_p\le(1+\varepsilon/2)(\tau,\lambda_{(n)})$ для будь-якого $\varepsilon>0$ і всіх досить великих $n_1+...+n_p$. Тому

$$h_2(1;(1+\varepsilon)\tau)=\underline{\lim_{\|n\|\to\infty}}\frac{((1+\varepsilon)\tau,\lambda_{(n)})}{\ln n_1+...+\ln n_p}\ge\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon/2}>1,$$

і за теоремою 2 $G_a\supset G_c-(1+\varepsilon)\tau$, $G_a\supset G_\mu-(1+\varepsilon)\tau$, тобто з огляду на довільність $\varepsilon>0$ отримуємо потрібні включення.

Зауважимо, що якщо

$$\lim_{\|n\|\to\infty}\frac{\ln n_1+...+\ln n_p}{\|\lambda_{(n)}\|}=0, \tag{11}$$

то (10) виконується для будь-яких $\tau:\ \tau_i>0$ ($i\in\{1,\dots,p\}$), а за наслідком 2.1 $G_c=G_a=G_\mu$. Неважко показати, що умови (2) і (11) рівносильні, і тому звідси та з теореми 2 випливає співвідношення (3).

Зауважимо тепер, що для ряду

$$F(z)=\sum\nolimits_{\|n\|=0}^{+\infty}(-1)^{\|n\|}e^{z_1\ln(n_1+1)+\dots+z_p\ln(n_p+1)}$$

$G_c=\{\sigma\colon(\forall j)[\sigma_j\le 0]\}$, $G_a=\{\sigma\colon(\forall j)[\sigma_j\le -1]\}$. При цьому $G_c=G_a+\tau$, $\tau=(1,\dots,1)$, і (10) виконується з даним τ, тобто твердження наслідку 2.1, а разом з ним і другого пункту теореми 2, покращити, взагалі кажучи, не можна.

Те ж саме можна стверджувати і для ряду

$$F(z)=\sum\nolimits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k e^{(z_1+\dots+z_p)\ln k}.$$

Для цього ряду $a_{(n)}=0$ для всіх $(n)=(n_1,\dots,n_p)\notin\{(m_1,\dots,m_p)\colon m_1=\dots=m_p\in\mathbb{N}\}$, $G_c=\{\sigma\colon\|\sigma\|<0\}$, $G_a=\{\sigma\colon\|\sigma\|<-1]\}$, а у наслідку 2.1 можна вибрати $\tau=(1/p,\dots,1/p)$, і тому $G_c=G_a+\tau$.

Наслідок 2.2. *Для кожного ряду Діріхле вигляду (1)*

$$G_c\subset G_a+p\tau_0e_1,$$

де τ_0 визначено в (2), а $e_1=(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^p$.

Справді, нехай в теоремі 2 $\gamma=1$ і $\delta_0=p\tau_0+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Тоді

$$h_1(\gamma,\ \delta_0)=\underline{\lim_{\|n\|\to\infty}}\frac{(p\tau_0+\varepsilon)\|\lambda_{(n)}\|}{\ln\|n\|}=\frac{p\tau_0+\varepsilon}{\tau_0}>p,$$

і, отже, правильні оцінки $G_a\supset G_c-(p\tau_0+\varepsilon)e_1$, тобто завдяки довільності ε маємо: $G_a\supset G_c-p\tau_0e_1$.

Література

1. Громов В.П. *К теории кратных рядов Дирихле* // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1970. – Т.5, №5. – С. 449-457.

2. Громов В.П. *К теории кратных рядов Дирихле* // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1972. – Т. 7, №2. – С. 90-103.

3. Громов В.П. *Кратные ряды Дирихле* // Сиб. матем. журн. – 1969. – Т.10, №3. – С. 522-536.

4. Задорожна О. Ю., Мулява О.М. *Про спряжені абсциси подвійного ряду Діріхле* // Матем. студії.– 2007. – Т.28, №1. – С. 29-35.

5. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536с.

6. Мулява О.М. *Про абсцису збіжності ряду Діріхле* // Матем. студії. – 1998. – Т.9, №2. – С. 171-176.

7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. – М.: Мир, 1984. – 528 с.

8. Янушаускас А.И. *Двойные ряды Дирихле* // Лит. матем. сб. – 1978. – Т.13, №3. – С. 201-211.

9. Янушаускас А.И. *Свойства сопряженных абсцисс сходимости двойных рядов Дирихле* // Лит. матем. сб. – 1979. Т.14, №1. – С. 213-228.

Львiвський нацiональний унiверситет iменi Iвана Франка,
Львiв, Україна.

Надійшло 22.10.2009

Zadorozhna O.Yu., Skaskiv O.B. *On the abscises of the convergence of multiple Dirichlet series*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 152–160.

For multiple Dirichlet series of the form $F(s) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_{(n)} \exp\{(\lambda_{(n)}, s)\}$ we establish relations between domains of the convergence G_c, absolutely convergence G_a and of the domain of the existence of the maximal term G_μ of the series as follows: $\gamma G_c \subset G_a + \delta_0 e_1$, $\gamma G_\mu \subset G_a + \delta_0 e_1$, where $e_1 = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^p$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$, by condition $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty} \frac{(\gamma-1)\ln|a_{(n)}|+\delta_0\|\lambda_{(n)}\|}{\ln\|n\|} > p$; $\gamma G_c \subset G_a + \delta$; $\gamma G_\mu \subset G_a + \delta$, where $\delta \in \mathbb{R}^p$, by condition $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty} \frac{(\gamma-1)\ln|a_{(n)}|+(\delta,\lambda_{(n)})}{\ln n_1+\ldots+\ln n_p} > 1$.

Задорожна О.Ю., Скаскив О.Б. *О сопряженных абсциссах сходимости кратного ряда Дирихле // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 152–160.

Для кратных рядов Дирихле $F(s) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_{(n)} \exp\{(\lambda_{(n)}, s)\}$ установлены связи между областями сходимости G_c, абсолютной сходимости G_a и областями существования максимального члена G_μ в виде таких соотношений: $\gamma G_c \subset G_a + \delta_0 e_1$, $\gamma G_\mu \subset G_a + \delta_0 e_1$, где $e_1 = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^p$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$ при условии $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty} \frac{(\gamma-1)\ln|a_{(n)}|+\delta_0\|\lambda_{(n)}\|}{\ln\|n\|} > p$ и $\gamma G_c \subset G_a + \delta$; $\gamma G_\mu \subset G_a + \delta$ при условии $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty} \frac{(\gamma-1)\ln|a_{(n)}|+(\delta,\lambda_{(n)})}{\ln n_1+\ldots+\ln n_p} > 1$.

Карпатськi математичнi публiкацiї. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 512.538

Заторський Р.А., Малярчук О.Р.

ФАКТОРIАЛЬНI СТЕПЕНI ТА ТРИКУТНI МАТРИЦI

Заторський Р.А., Малярчук О.Р *Факторiальнi степенi та трикутнi матрицi // Карпатськi математичнi публiкацiї.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 161–171.

В роботi узагальнюються поняття спадного i зростаючого факторiального степенiв та тотожностi Нерлунда та Вандермонда. При допомозi факторiальних степенiв з кроком, видiлено клас, так званих, факторiальних числових трикутникiв, елементи яких задовольняють деяке рекурентне спiввiдношення.

Вступ

Спаднi та зростаючi факторiальнi степенi, на вiдмiну вiд бiномiальних коефiцiєнтiв та iнших комбiнаторних формул, допускають узагальнення не тiльки на множину всiх цiлих, але й дiйсних чи, навiть, комплексних чисел. Тому їх подальшi узагальнення завжди кориснi. Вони дозволяють унiфiкувати дослiдження в деяких напрямках комбiнаторного аналiзу, видiлити клас факторiальних числових трикутникiв, до якого належать трикутники Паскаля, Стiрлiнга першого i другого роду, трикутник Ла та багато iнших нових числових трикутникiв, що очiкують своїх комбiнаторних iнтерпретацiй. При цьому виявляються загальнi закономiрностi, властивi всiм числовим трикутникам цього класу.

Введення поняття факторiального степеня з деяким кроком дозволяє двоїстi тотожностi чи формули для спадних та зростаючих факторiальних степенiв замiнити однiєю загальною тотожнiстю чи формулою. Зокрема, такий пiдхiд дозволяє узагальнити тотожностi Вандермонда та Нерлунда.

1 Факторiальнi числовi трикутники та тотожностi

Означення 1.1. *Для довiльних дiйсного числа x i натурального числа n* ***факторiальним степенем*** *n з кроком k, де k належить множинi рацiональних чисел, назвемо вираз вигляду*

$$x^{n\{k\}} = x(x+k)(x+2k)\cdot\ldots\cdot(x+(n-1)k).$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.
Ключовi слова i фрази: трикутна матриця, факторiальний степiнь.

© Заторський Р.А., Малярчук О.Р., 2009

Зручно вважати, що

$$x^{0\{k\}} = 1. \tag{1}$$

Зауважимо, що найчастіше зустрічаються зростаючі та спадні факторіали степеня n з кроками $1, -1, 0$, які, в існуючій літературі, позначаються відповідно через:

$$[x]^n = x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1),$$

$$[x]_n = x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1),$$

$$x^n = \underbrace{x\cdot x\ldots x}_{n}.$$

Отже,

$$n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n = n^{n\{-1\}} = 1^{n\{1\}},$$

причому, згідно з домовленістю (1), маємо $0! = 1$.

Теорема 1. *Для довільних параметрів x і y та довільного k виконується тотожність:*

$$(x+y)^{n\{k\}} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{i\{k\}}y^{n-i\{k\}}. \tag{2}$$

Доведення. При $n = 1$ тотожність (2) очевидно справедлива. Справедливість індукційного кроку випливає із наступних рівностей

$$(x+y)^{n+1\{k\}} = (x+y)^{n\{k\}}(x+y+nk) =$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{i\{k\}}y^{n-i\{k\}}((x+ik)+(y+(n-i)k)) =$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{i+1\{k\}}y^{n-i\{k\}} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{i\{k\}}y^{n-i+1\{k\}} =$$

$$\binom{n}{0}x^{0\{k\}}y^{n+1\{k\}} + \sum_{i=0}^{n-1}\left(\binom{n}{i}+\binom{n}{i+1}\right)x^{i+1\{k\}}y^{n-i\{k\}} + \binom{n}{n}x^{n+1\{k\}}y^{0\{k\}} =$$

$$\binom{n+1}{0}x^{0\{k\}}y^{n+1\{k\}} + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i+1}x^{i+1\{k\}}y^{n-i\{k\}} + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1\{k\}}y^{0\{k\}} =$$

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}x^{i\{k\}}y^{n-i+1\{k\}}.$$

□

Якщо у тотожності (2) теореми 1 замість k підставити -1, 1, 0, то вони отримають вигляд тотожностей Вандермонда[1], Нерлунда[2] та біноміальної відповідно:

$$(x+y)^{n\{-1\}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k\{-1\}}y^{n-k\{-1\}},$$

А. Вандермонд (1735-1796) — французький математик і політичний діяч.
Н.Е. Нерлунд (1885-1981) — данський математик.

$$(x+y)^{n\{1\}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k\{1\}}y^{n-k\{1\}},$$

$$(x+y)^{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}y^{n-k}.$$

Важливу роль в різних областях математики відіграють спеціальні комбінаторні числа та многочлени. Згадаймо лише біноміальні многочлени та їх коефіцієнти, числа Стірлінга першого і другого роду, числа та многочлени Ойлера, ортогональні многочлени тощо. Проте, найбільш відомі многочлени своєю популярністю завдячують лише своїм коефіцієнтам.

В усіх перелічених випадках послідовність многочленів

$$\begin{array}{l} a_{00}, \\ a_{10}+a_{11}t, \\ a_{20}+a_{21}t+a_{22}t^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n0}+a_{n1}t+a_{n2}t^2+\ldots+a_{nn}t^n,\ n\in\mathbb{N}, \end{array}$$

де $a_{ii}\neq 0,\ i=0,1,\ldots$, задається трикутною таблицею їх коефіцієнтів

$$\begin{array}{lllll} a_{00} & & & & \\ a_{10} & a_{11} & & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{array}.$$

Цікавим виявляється і наступний загальний підхід до вивчення властивостей числових трикутників.

Позаяк многочлени

$$(x+r)^{i\{s\}},\ i=0,1,\ldots,n,$$

за змінною x утворюють базис у просторі многочленів степеня не вищого за n, то многочлени

$$(x+t)^{i\{k\}},\ i=0,1,\ldots,n,$$

можна подати у вигляді їх лінійної комбінації. При цьому отримаємо наступні тотожності:

$$\begin{array}{lcl} (x+t)^{0\{k\}} & = & a_{00}(x+r)^{0\{s\}}, \\ (x+t)^{1\{k\}} & = & a_{10}(x+r)^{0\{s\}}+a_{11}(x+r)^{1\{s\}}, \\ (x+t)^{2\{k\}} & = & a_{20}(x+r)^{0\{s\}}+a_{21}(x+r)^{1\{s\}}+a_{22}(x+r)^{2\{s\}}, \\ (x+t)^{3\{k\}} & = & a_{30}(x+r)^{0\{s\}}+a_{31}(x+r)^{1\{s\}}+a_{32}(x+r)^{2\{s\}}+a_{33}(x+r)^{3\{s\}}, \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x+t)^{n\{k\}} & = & a_{n0}(x+r)^{0\{s\}}+a_{n1}(x+r)^{1\{s\}}+a_{n2}(x+r)^{2\{s\}}+\ldots+a_{nn}(x+r)^{n\{s\}},. \end{array}$$

Таким чином, ми приходимо до класу числових трикутників

$$\begin{array}{llllll}
a_{00} & & & & & \\
a_{10} & a_{11} & & & & \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & & & \\
a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\
a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\
a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} \; \dots & a_{nn}
\end{array},$$

які назвемо *факторіальними числовими трикутниками.*

Теорема 2. *Коефіцієнти тотожностей*

$$(x+t)^{i\{k\}} = \sum_{j=0}^{i} a_{ij}(x+r)^{j\{s\}}, \; i = 0, 1, 2, \dots,$$

задовольняють рекурентне рівняння

$$a_{ij} = a_{i-1,j-1} + (t - r + (i-1)k - js)a_{i-1,j}, \qquad (3)$$

де $a_{ii} = 1, a_{i,-1} = 0, \; i = 0, 1, \dots, n.$

Доведення. При $i = 0$ маємо справедливу тотожність:

$$(x+t)^{0\{k\}} = a_{00}(x+r)^{0\{s\}}.$$

Доведемо справедливість індукційного кроку.

$$\sum_{j=0}^{i} a_{ij}(x+r)^{j\{s\}} = \sum_{j=0}^{i}(a_{i-1,j-1} + (t-r+(i-1)k-js)a_{i-1,j})(x+r)^{j\{s\}} =$$

$$\sum_{j=1}^{i} a_{i-1,j-1}(x+r)^{j\{s\}} + \sum_{i=0}^{i-1}(t-r+(i-1)k-js)a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}}.$$

Нехай у першій сумі $j = j' + 1$, тоді її можна подати у вигляді

$$\sum_{j'=0}^{i-1} a_{i-1,j'}(x+r)^{j'+1\{s\}} = \sum_{j=0}^{i-1} a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}}(x+r+js).$$

Таким чином, маємо

$$\sum_{j=0}^{i} a_{ij}(x+r)^{j\{s\}} = \sum_{j=0}^{i-1} a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}}(x+r+js) + \sum_{i=0}^{i-1}(t-r+(i-1)k-js)a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}} =$$

$$(x+t+(i-1)k)\sum_{j=0}^{i-1} a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}} = (x+t+(i-1)k)(x+t)^{i-1\{k\}} = (x+t)^{i\{k\}}.$$

□

Рекурентне рівняння (3) є загальним рекурентним рівнянням для всіх факторіальних числових трикутників. Підставляючи замість t, k, r, s числа із множини $\{-1, 0, 1\}$, отримаємо мультимножину потужності $3^4 = 81$ числових трикутників:

№	t	k	r	s	Перетворення	№t	Короткий коментар
1	-1	-1	-1	-1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{n\{-1\}}$		тривіальний
2	-1	-1	-1	0	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j}$		$\equiv t10$
3	-1	-1	-1	1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$		$\equiv t11$
4	-1	-1	0	-1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to x^{j\{-1\}}$		$\equiv t12$
5	-1	-1	0	0	$(x-1)^{n\{-1\}} \to x^{j}$		$\equiv t13$
6	-1	-1	0	1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to x^{j\{1\}}$		$\equiv t14$
7	-1	-1	1	-1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t1	$\circlearrowleft t28, \lvert t1\rvert \equiv t42$
8	-1	-1	1	0	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j}$	t2	$\circlearrowleft t34, \lvert t2\rvert \equiv t41$
9	-1	-1	1	1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t3	$\circlearrowleft t40, \lvert t3\rvert \equiv t40$
10	-1	0	-1	-1	$(x-1)^{n} \to (x-1)^{j}\{-1\}$		$\equiv t15$
11	-1	0	-1	0	$(x-1)^{n} \to (x-1)^{n}$		тривіальний
12	-1	0	-1	1	$(x-1)^{n} \to (x-1)^{j\{1\}}$		$\equiv t16$
13	-1	0	0	-1	$(x-1)^{n} \to x^{j\{-1\}}$		$\equiv t17$
14	-1	0	0	0	$(x-1)^{n} \to x^{j}$		$\equiv t18$
15	-1	0	0	1	$(x-1)^{n} \to x^{j\{1\}}$		$\equiv t19$
16	-1	0	1	-1	$(x-1)^{n} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t4	$\circlearrowleft t29, \lvert t4\rvert \equiv \lvert t36\rvert$
17	-1	0	1	0	$(x-1)^{n} \to (x+1)^{j}$	t5	$\circlearrowleft t35, \lvert t5\rvert \equiv t35$
18	-1	0	1	1	$(x-1)^{n} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t6	$\circlearrowleft t41, \lvert t6\rvert \equiv t34$
19	-1	1	-1	-1	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t23$
20	-1	1	-1	0	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j}$		$\equiv t24$
21	-1	1	-1	1	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$		тривіальний
22	-1	1	0	-1	$(x-1)^{n\{1\}} \to x^{j\{-1\}}$		$\equiv t25$
23	-1	1	0	0	$(x-1)^{n\{1\}} \to x^{j}$		$\equiv t26$
24	-1	1	0	1	$(x-1)^{n\{1\}} \to x^{j\{1\}}$		$\equiv t27$
25	-1	1	1	-1	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t7	$\circlearrowleft t30, t7 \equiv \lvert t30\rvert$
26	-1	1	1	0	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j}$	t8	$\circlearrowleft t36, \lvert t8\rvert \equiv \lvert t29\rvert$
27	-1	1	1	1	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t9	$\circlearrowleft t42, \lvert t9\rvert \equiv t28$
28	0	-1	-1	-1	$x^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t31$
29	0	-1	-1	0	$x^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j}$		$\equiv t32$
30	0	-1	-1	1	$x^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$		$\equiv t33$
31	0	-1	0	-1	$x^{n\{-1\}} \to x^{j\{-1\}}$		тривіальний
32	0	-1	0	0	$x^{n\{-1\}} \to x^{j}$	t10	тр. Стірлінга I роду
33	0	-1	0	1	$x^{n\{-1\}} \to x^{j\{1\}}$	t11	$\circlearrowleft t23, \lvert t11\rvert \equiv t23$
34	0	-1	1	-1	$x^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t12	$\circlearrowleft t31, \lvert t12\rvert \equiv t22$
35	0	-1	1	0	$x^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j}$	t13	$\circlearrowleft t37, \lvert t13\rvert \equiv t21$
36	0	-1	1	1	$x^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t14	$\circlearrowleft t20, \lvert t14\rvert \equiv t20$
37	0	0	-1	-1	$x^{n} \to (x-1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t37$
38	0	0	-1	0	$x^{n} \to (x-1)^{j}$		$\equiv t38$
39	0	0	-1	1	$x^{n} \to (x-1)^{j\{1\}}$		$\equiv t39$
40	0	0	0	-1	$x^{n} \to x^{j\{-1\}}$	t15	тр. Стірлінга II роду
41	0	0	0	0	$x^{n} \to x^{j}$		тривіальний

№	t	k	r	s	Перетворення	№t	Короткий коментар
42	0	0	0	1	$x^n \to x^{j\{1\}}$	t16	$\circlearrowleft t24$, $\lvert t16\rvert \equiv t15$
43	0	0	1	-1	$x^n \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t17	$\circlearrowleft t32$, $t17 \to t15$
44	0	0	1	0	$x^n \to (x+1)^{j}$	t18	$\circlearrowleft t38$, $\lvert t18\rvert \equiv t38$
45	0	0	1	1	$x^n \to (x+1)^{j\{1\}}$	t19	$\circlearrowleft t21$, $\lvert t19\rvert \equiv t37$
46	0	1	-1	-1	$x^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$	t20	$\circlearrowleft t14$, $t20 \equiv \lvert t14\rvert$
47	0	1	-1	0	$x^{n\{1\}} \to (x-1)^{j}$	t21	$\circlearrowleft t19$
48	0	1	-1	1	$x^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$	t22	$\circlearrowleft t27$
49	0	1	0	-1	$x^{n\{1\}} \to x^{j\{-1\}}$	t23	тр. Ла, $\circlearrowleft t11$
50	0	1	0	0	$x^{n\{1\}} \to x^{j}$	t24	$\circlearrowleft t16$
51	0	1	0	1	$x^{n\{1\}} \to x^{j\{1\}}$		тривіальний
52	0	1	1	-1	$x^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t25	$\circlearrowleft t33$, $t25 \equiv \lvert t33\rvert$
53	0	1	1	0	$x^{n\{1\}} \to (x+1)^{j}$	t26	$\circlearrowleft t39$, $t26 \to t24$
54	0	1	1	1	$x^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t27	$\circlearrowleft t22$, $\lvert t27\rvert \equiv t31$
55	1	-1	-1	-1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$	t28	$\circlearrowleft t1$
56	1	-1	-1	0	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j}$	t29	$\circlearrowleft t4$
57	1	-1	-1	1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$	t30	$\circlearrowleft t7$, $t30 \to t11$
58	1	-1	0	-1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to x^{j\{-1\}}$	t31	$\circlearrowleft t12$
59	1	-1	0	0	$(x+1)^{n\{-1\}} \to x^{j}$	t32	$\circlearrowleft t17$, $t32 \to t10$
60	1	-1	0	1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to x^{j\{1\}}$	t33	$\circlearrowleft t25$
61	1	-1	1	-1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$		тривіальний
62	1	-1	1	0	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j}$		$\equiv t10$
63	1	-1	1	1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$		$\equiv t11$
64	1	0	-1	-1	$(x+1)^{n} \to (x-1)^{j\{-1\}}$	t34	$\circlearrowleft t2$
65	1	0	-1	0	$(x+1)^{n} \to (x-1)^{j}$	t35	$\circlearrowleft t5$
66	1	0	-1	1	$(x+1)^{n} \to (x-1)^{j\{1\}}$	t36	$\circlearrowleft t8$
67	1	0	0	-1	$(x+1)^{n} \to x^{j\{-1\}}$	t37	$\circlearrowleft t13$
68	1	0	0	0	$(x+1)^{n} \to x^{j}$	t38	$\circlearrowleft t18$, тр. Паскаля
69	1	0	0	1	$(x+1)^{n} \to x^{j\{1\}}$	t39	$\circlearrowleft t26$, $t39 \to t16$
70	1	0	1	-1	$(x+1)^{n} \to (x+1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t15$
71	1	0	1	0	$(x+1)^{n} \to (x+1)^{j}$		тривіальний
72	1	0	1	1	$(x+1)^{n} \to (x+1)^{j\{1\}}$		$\equiv t16$
73	1	1	-1	-1	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$	t40	$\circlearrowleft t3$
74	1	1	-1	0	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j}$	t41	$\circlearrowleft t6$
75	1	1	-1	1	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$	t42	$\circlearrowleft t9$
76	1	1	0	-1	$(x+1)^{n\{1\}} \to x^{j\{-1\}}$		$\equiv t20$
77	1	1	0	0	$(x+1)^{n\{1\}} \to x^{j}$		$\equiv t21$
78	1	1	0	1	$(x+1)^{n\{1\}} \to x^{j\{1\}}$		$\equiv t22$
79	1	1	1	-1	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t23$
80	1	1	1	0	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j}$		$\equiv t24$
81	1	1	1	1	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$		тривіальний

Кожному рядку наведеної вище таблиці відповідає деякий числовий трикутник. Запис $\equiv t10$ в останньому стовпці другого рядка означає, що числовий трикутник, який відповідає другому рядку, тотожний числовому трикутнику 32–го рядка; записи у сьомому рядку таблиці означають, що йому відповідає трикутник $t1$, який є оберненим числовим трикутником ($\circlearrowleft t28$) до числового трикутника 55–го рядка, причому модулі всіх елементів цього трикутника ($|t1| \equiv t42$) утворюють трикутник $t42$; записи із 43–го рядка означають, що йому відповідає числовий трикутник $t17$, який є оберненим до числового трикутника 59 рядка, причому, викреслюючи в ньому перший стовпець, можна отримати ($t17 \to t15$) числовий трикутник $t15$.

Таким чином, можна побудувати 42 різні числові трикутники $t1, t2, \ldots, t42$.

Цікаво було б знайти деякі комбінаторні інтерпретації елементів нових числових трикутників.

2 Факторіальні числові трикутники та парафункції трикутних матриць

Наведемо приклади, в яких зустрічаються факторіальні числові трикутники.

1. При $x_0 = 1$, $x_i = x$, $i = 1, 2, \ldots, n$, маємо тотожності:

$$pperZ(x, x, \ldots, x) = \begin{bmatrix} x & & & & \\ 1 & x & & & \\ 1 & 1 & x & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & x \end{bmatrix}_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} = \tag{4}$$

$$\sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot x^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} = x(x+1)^{n-1},$$

$$ddetZ(x, x, \ldots, x) = \left\langle \begin{matrix} x & & & & \\ 1 & x & & & \\ 1 & 1 & x & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & x \end{matrix} \right\rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} = \tag{5}$$

$$\sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} (-1)^{n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot x^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} =$$

$$x(x-1)^{n-1}.$$

Ліві частини формул (4), (5) є відповідно параперманентом та парадетермінантом трикутної матриці [2]. Таким чином, коефіцієнти многочленів

$$\mathrm{pper}Z_i(x, x, \ldots, x), \quad \mathrm{ddet}Z_i(x, x, \ldots, x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

утворюють трикутник Паскаля ($t38$) без знаків та трикутник Паскаля із знаками ($t18$) відповідно, причому справедлива рівність:

$$\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} = \binom{n-1}{m}.$$

2. Для параперманента матриці Белла [3],

$$B(x_1,x_2,\ldots,x_n) = pper\begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ \frac{1}{1}\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{x_3}{x_2} & \frac{2}{1}\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \frac{1}{n-1}\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{2}{n-2}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \frac{n-1}{1}\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix} =$$

$$pper\left(\frac{j}{i-j+j\cdot\delta_{ij}}\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_{1\le j\le i\le n},$$

справедлива тотожність:

$$B(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Якщо зробити підстановку $x_i = x$, $i=1,2,\ldots,n$, то отримаємо многочлени Стірлінга II роду:

$$B(x,x\ldots,x) = \begin{bmatrix} x & & & & \\ \frac{1}{1} & x & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & x & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \frac{1}{n-1} & \frac{2}{n-2} & \frac{3}{n-3} & \cdots & x \end{bmatrix}_n =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}\cdot x^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} =$$

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}\cdot x^m,$$

де

$$S(n,m) = \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}$$

— числа Стірлінга другого роду (див. [4], стор. 191), та трикутник Стірліга ($t15$).

3. Якщо у многочлені Белла зробити підстановку $x_i = i!x$, то він перепишеться у вигляді многочленів Ла [1]:

$$B\left(\frac{x}{1!},\frac{x}{2!},\ldots,\frac{x}{n!}\right) = \left[\frac{j\cdot(i-j+1)}{i-j+j\cdot\delta_{ij}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot x^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$

з відповідним числовим трикутником Ла ($t23$).

Зауважимо, що із многочленів

$$\left\langle\frac{j}{i-j+j\cdot\delta_{ij}}\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right\rangle_{1\le j\le i\le n} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}\cdot\frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}\cdot x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}$$

при підстановці $x_i = i!x$, $i=1,2,\ldots,n$ можна отримати трикутник чисел Ла із знаками ($t11$).

4. Розглянемо ще один параперманент трикутної матриці похилої структури:

$$C_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \left[(j-(j-1)\cdot\delta_{ij})\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right]_{1\le j\le i\le n} =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & & & & \\ \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{x_3}{x_2} & 2\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \frac{x_4}{x_3} & 2\cdot\frac{x_3}{x_2} & 3\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} & 2\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & (n-1)\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{bmatrix}_n, \tag{6}$$

що співпадає із цикловим індикатором симетричної групи

$$C_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}}\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Якщо в тотожності (6) $x_1=\ldots=x_n=x$, то вона прийме вигляд

$$\begin{bmatrix} x & & & & \\ 1 & x & & & \\ 1 & 2 & x & & \\ 1 & 2 & 3 & x & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1) & x \end{bmatrix}_{1\le j\le i\le n} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}}\cdot x^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}, \tag{7}$$

але параперманент лівої частини рівності (2) дорівнює $x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)$, і ми отримуємо відому ([4], стор. 181) тотожність

$$C_n(\underbrace{x,\ldots,x}_{n}) = x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1).$$

Розкриваючи дужки у її правій частині, ми прийдемо до многочленів

$$C(x), C(x,x), \ldots, C_n(\underbrace{x,\ldots,x}_{n}),$$

коефіцієнти яких утворюють трикутник чисел Стірлінга першого роду без знаків ($t24$).

Для парадетермінанта матриці

$$\left((j-(j-1)\cdot\delta_{ij})\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right)_{1\le j\le i\le n}$$

виконується рівність

$$\left\langle (j-(j-1)\cdot\delta_{ij})\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right\rangle_{1\le j\le i\le n} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}\frac{n!}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}. \qquad (8)$$

Враховуючи те, що виконується рівність (див. [4], стор. 191)

$$s(n,k)=\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=k}} (-1)^{n-k}\cdot\frac{n!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!\cdot 1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}},$$

де $s(n,k)$ – числа Стірлінга першого роду, із рівності (8) при

$$x_1=\ldots=x_n=x$$

можна отримати послідовність многочленів, коефіцієнти яких утворюють трикутник чисел Стірлінга I роду ($t10$).

Зауважимо також, що многочлени $B_n(x_1,\ldots,x_n)$ та $C_n(x_1,\ldots,x_n)$ пов'язані між собою рівністю

$$B_n(0!x_1,\ldots,(n-1)!x_n)=C_n(x_1,\ldots,x_n).$$

Тому, підставивши у многочлени $B_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ та $C_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ замість x_i вирази $i!x$ та ix відповідно, отримаємо однакові многочлени, які приводять до трикутника Ла ($t23$).

Література

1. Айгнер М. Комбинаторная теория: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 558 с.

2. Заторський Р.А. *Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць* // Математичні студії. – 2002. – Т.17, №1. – С. 3-17.

3. Заторський Р.А. *Скалярний добуток вектора на парадетермінант трикутної матриці та його застосування*//Прикарпатський вісник НТШ. – 2008. – Т.1 №1 – С. 22-30.

4. Риордан Дж. Комбинаторные тождества: пер. с англ.– М.: Наука, 1982. – 255 с.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 21.09.2009

Zatorsky R.A., Malarchuk A.R *Factorial degrees and triangular matrices*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 161–171.

Increasing and decreasing factorial degrees as well as identities of Nørlund and Vandermonde are generalized in the article. By means of factorial degrees with a step it is selected so called class of factorial numerical triangles, elements of which satisfy some recurrent relation.

Заторский Р.А., Малярчук А.Р *Факториальные степени и треугольные матрицы* // *Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 161–171.

В работе обобщаются понятия убывающего и возрастающего факториальных степеней и тождества Нерлунда и Вандермонда. При помощи факториальных степеней с шагом, выделено класс, так называемых, факториальных числовых треугольников, элементы которых удовлетворяют некоторому рекуррентному соотношению.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 517.948:517.946

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А.

ДВОСТОРОННЯ АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Двостороння апроксимація розв'язків диференціальних рівнянь* // *Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 172–179.

Досліджено двосторонні ітераційні алгоритми, які є аналогами методу Чаплигіна для звичайних диференціальних рівнянь. Встановлено умови, при виконанні яких вони можуть мати квадратичну збіжність навіть у випадку недиференційовності оператора.

Реалізація наближених методів розв'язання нелінійних задач та лінійних задач високої розмірності на практиці здебільшого не обходиться без потреби ітераційного уточнення шуканого наближеного розв'язку. Це викликає зацікавленість до теорії відомих та побудови і дослідження нових ітераційних методів, отримуваних, зокрема, поєднанням різних способів наближеного розв'язання операторних рівнянь. При цьому часто значно розширюються можливості їх ефективного застосування як у класичних (див., напр. [1] – [5]), так і у новітніх (див., напр. [6, 9]) дослідженнях. З цього погляду актуальною є потреба розширити можливості двосторонніх методів, які характеризуються такими властивостями, як можливістю двостороннього апостеріорного оцінювання шуканого розв'язку на кожному кроці ітераційного процесу, оцінювання якісного характеру поведінки цього розв'язку, монотонністю ітерацій і, у багатьох випадках, їх надлінійною швидкістю збіжності. Цим обумовлена актуальність пропонованого дослідження, яке доповнює і уточнює деякі результати із [2, 8] , а також із [7] .

Будемо шукати в класі неперервно диференційовних на $[t_0, t_1]$ функцій розв'язок задачі Коші

$$x'(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

де $f(t,x)$ – дійсна неперервна функція при $t \in [t_0, t_1]$, $x \in S(x_0) = \{x \| x - x_0| \leqslant M, \quad x, x_0 \in R\}$, R – множина дійсних чисел. Припустимо виконання наступних умов.

2000 *Mathematics Subject Classification:* ?.

Ключові слова і фрази: недиференційовні оператори, неперервно-диференційовні функції, двосторонні оцінки.

© Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А., 2009

Умова H_1. *Існують такі неперервні за сукупністю аргументів при* $t \in [t_0, t_1]$, $x \in S(x_0)$, *неспадні щодо* x *функції* $a_1(t,x)$, $\alpha_1(t,x)$, *причому* $\alpha_1(t,x)$ *є невід'ємною, що із співвідношень* $t \in [t_0, t_1]$, $y \leqslant z$, $y, z \in S(x_0)$, *випливає нерівність*

$$[a_1(t,y) + \alpha_1(t,y)](z - y) \leqslant f(t,z) - f(t,y).$$

Умова H_2. *Існують неперервно диференційовні при* $t \in [t_0, t_1]$ *функції* $u(t), v(t) \in S$, *для яких*

$$u(t_0) = v(t_0) = x_0, \quad u(t) \leqslant v(t) \quad (t \in [t_0, t_1]) \tag{2}$$

$$u'(t) \leqslant f(t, u(t)), \quad v'(t) \geqslant f(t, v(t)) \quad (t \in [t_0, t_1]). \tag{2'}$$

Розглянемо ітераційний процес

$$y_0(t) = u(t), \quad z_0(t) = v(t),$$

$$y'_{n+1}(t) = a_1(t, y_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t) + f(t, y_n(t)),$$

$$z'_{n+1}(t) = [a_1(t, y_n(t)) + \alpha_1(t, y_n(t))](z_{n+1}(t) - z_n(t) + f(t, z_n(t)), \tag{3}$$

$$y_{n+1}(t_0) = z_{n+1}(t_0) = x_0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3'}$$

Позначимо $S_0 = [u, v] = \{x | u \leqslant x \leqslant v, u, v, x \in S(x_0)\}$.

Теорема 1. *Якщо справджуються умови* H_1 *та* H_2, *то для послідовностей* $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, *побудованих за формулами (3), мають місце нерівності*

$$y_k(t) \leqslant y_{k+1}(t) \leqslant z_{k+1}(t) \leqslant z_k(t) \quad (t \in [t_0, t_1], k = 0, 1, \ldots). \tag{4}$$

Доведення. Співвідношення (4) для $k = 0$ випливають з (2), (3). Припускаючи, що вони мають місце лише для $k = n - 1$, матимемо

$$y'_{n+1}(t) - y'_n(t) = f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t)) + a_1(t, y_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) -$$
$$a_1(t, y_{n-1}(t))(y_n(t) - y_{n-1}(t)) \geqslant a_1(t, y_{n-1}(t))(y_n(t) - y_{n-1}(t)) +$$
$$\alpha_1(t, y_{n-1}(t))(y_n(t) - y_{n-1}(t)) + a_1(t, y_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) -$$
$$a_1(t, y_{n-1}(t))(y_n(t) - y_{n-1}(t)) \geqslant a_1(t, y_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t)),$$

$$z'_n(t) - z'_{n+1}(t) = f(t, z_{n-1}(t)) - f(t, z_n(t)) + a_1(t, y_{n-1}(t))(z_n(t) - z_{n-1}(t)) -$$
$$a_1(t, y_n(t))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) + \alpha_1(t, y_{n-1}(t))(z_n(t) - z_{n-1}(t)) - \alpha_1(t, y_n(t))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) \geqslant$$
$$a_1(t, z_n(t))(z_{n-1}(t) - z_n(t)) - \alpha_1(t, y_{n-1}(t))(z_{n-1}(t) - z_n(t)) - a_1(t, y_{n-1}(t))(z_{n-1}(t) - z_n(t)) +$$
$$a_1(t, y_n(t))(z_n(t) - z_{n+1}(t)) + \alpha_1(t, y_n(t))(z_n(t) - z_{n+1}(t)) + \alpha_1(t, z_n(t))(z_{n-1}(t) - z_n(t)) =$$
$$[a_1(t, y_n(t)) + \alpha_1(t, y_n(t))](z_n(t) - z_{n+1}(t)) + [a_1(t, z_n(t)) - a_1(t, y_{n-1}(t))](z_{n-1}(t) - z_n(t)) +$$
$$[\alpha_1(t, y_n(t)) - \alpha_1(t, y_{n-1}(t))](z_{n-1}(t) - z_n(t)) \geqslant [a_1(t, y_n(t)) + \alpha_1(t, y_n(t))](z_n(t) - z_{n+1}(t)),$$

$$z'_{n+1}(t) - y'_{n+1}(t) = a_1(t, y_n(t))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) - a_1(t, y_n(t))(z_n(t) - y_n(t)) +$$
$$\alpha_1(t, y_n(t))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) + f(t, z_n(t)) - f(t, y_n(t)) \geqslant a_1(t, y_n(t))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) -$$
$$a_1(t, y_n(t))(z_n(t) - y_n(t)) - \alpha_1(t, y_n(t))(z_n(t) - z_{n+1}(t)) + a_1(t, y_n(t))(z_n(t) - y_n(t)) +$$
$$\alpha_1(t, y_n(t))(z_n(t) - y_n(t)) = a_1(t, y_n(t))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) + \alpha_1(t, y_n(t))(z_{n+1}(t) - y_n(t)) \geqslant$$
$$(a_1(t, y_n(t)) + \alpha_1(t, y_n(t)))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) + \alpha_1(t, y_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) =$$
$$(a_1(t, y_n(t)) + \alpha_1(t, y_n(t)))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)).$$

Отримані співвідношення разом з теоремою про диференціальні нерівності [2][с. 199] означають, що нерівності (4) виконуються. □

Дослідимо збіжність ітераційного процесу (3). З неперервності правої частини рівняння (1) випливає існування принаймні одного неперервно диференційовного на $[t_0, t_2)$ розв'язку $x(t)$ задачі (1). З іншого боку, із співвідношень (4) робимо висновок про існування неперервних границь $y(t)$ та $z(t)$ компактних послідовностей $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$. Можна переконатися, що послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ – рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні, і тому можна посилатися на лему Арчела. Функції $y(t)$ та $z(t)$ є неперервно диференційовними і кожна з них є розв'язком задачі (1). Якщо задача (1) має єдиний неперервно диференційовний на $[t_0, t_1]$ розв'язок $x(t)$, то $x(t) = y(t) = z(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$. Отже, має місце таке твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і задача (1) має єдиний неперервно диференційовний розв'язок $x(t)$. Тоді послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$, побудовані за формулами (3), збігаються рівномірно і монотонно відповідно знизу і зверху до цього розв'язку, тобто*

$$y_n(t) \leqslant y_{n+1}(t) \leqslant x(t) \leqslant z_n(t) \leqslant z_{n+1}. \tag{5}$$

Умова H_3. *Існує така неперервна за сукупністю аргументів невід'ємна функція $b_1(t, y, z)$, що з нерівності $y \leqslant z$, $y, z \in S(x_0)$ випливає*

$$f(t, z) - f(t, y) \leqslant (a_1(t, y) - b_1(t, y, z))(z - y) \quad (t \in [t_0, t_1]). \tag{6}$$

Теорема 3. *Якщо справджуються умови $H_1 - H_3$, то мають місце оцінки*

$$z'_{n+1} - y'_{n+1} \leqslant a_1(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) + b_1(t, y, z)(z_n - y_n), \tag{7}$$

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leqslant \int_{t_0}^{t} b_1(s, y_n, z_n) \exp\left(\int_s^t a_1(\xi, y_n) d\xi\right) (z_n - y_n)\, ds. \tag{8}$$

Доведення. Використовуючи умову H_3 та нерівності (3), знаходимо

$$z'_{n+1} - y'_{n+1} = a_1(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) - a_1(t, y_n)(z_n - y_n) - \alpha_1(t, y_n)(z_n - z_{n+1}) +$$
$$f(t, z_n) - f(t, y_n) \leqslant a_1(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) - a_1(t, y_n)(z_n - y_n) -$$
$$\alpha_1(t, y_n)(z_n - z_{n+1}) + a_1(t, y_n)(z_n - y_n) + b_1(t, y_n, z_n)(z_n - y_n) \leqslant$$

$$a_1(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) + b_1(t, y_n, z_n)(z_n - y_n).$$

Для обгрунтування оцінки (8) скористаємося задачею

$$w'_{n+1} = a_1(t, y_n) w_{n+1} + b_1(t, y_n, z_n) w_n, \quad w_{n+1}(t_0) = 0. \tag{9}$$

З теоремою [2] про диференціальні нерівності та умови (9) випливає нерівність

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leqslant w_{n+1}.$$

Тому, виписавши у явному вигляді розв'язок задачі (9), отримуємо оцінку (8). □

Оцінки (7), (8) можна уточнити, якщо конкретизувати вибір функції $b_1(t, y, z)$. Зокрема, поклавши, що $b_1(t, y, z) \leqslant h(t, y, z)(z - y)^\gamma$, де $\gamma > 0$, $h(t, y, z) \leqslant h_0$, з нерівностей (7), (8) при

$$\exp\left[\int_s^t |a_1(\xi, y_n(\xi))| d\xi\right] \leqslant a_0$$

одержимо

$$z'_{n+1} - y'_{n+1} \leqslant a_1(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) + h(t, y_n, z_n)(z_n - y_n)^{1+\gamma}, \tag{10}$$

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leqslant \int_{t_0}^{t_1} h_1(s, y_n, z_n) \exp\left[\int_s^t a_1(\xi, y_n(\xi)) d\xi\right] (z_n(s) - y_n(s))^{1+\gamma}\, ds, \tag{11}$$

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leqslant h_0 a_0 \int_{t_0}^{t_1} (z_n(s) - y_n(s))^{1+\gamma}\, ds, \tag{12}$$

де $t, s \in [t_0, t_1]$, $y \in [u, v]$, $[u, v] = \{y(t) | u(t) \leqslant y(t) \leqslant v(t)\}$.

Якщо $|a_1(t, y)| \leqslant g_1$ при $t \in [t_0, t_1]$, $y \in [u, v]$, то із (11) одержуємо

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leqslant h_0 \int_{t_0}^{t_1} e^{g_1(t-s)} (z_n(s) - y_n(s))^{1+\gamma} ds. \tag{13}$$

Апостеріорні оцінки (7), (8), (10)–(13) можна використати для отримання апріорних оцінок. Зокрема, з (12) випливає, що

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leqslant (h_0 a_0)^{\frac{(1+\gamma)^{n+1} - 1}{\gamma}} \left[\max_t (v(t) - u(t))\right]^{(1+\gamma)^{n+1}} (t_1 - t_0) \tag{14}$$

для $\gamma > 0$. При $\gamma = 1$ матимемо характерну для методу Чаплигіна оцінку

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leqslant (h_0 a_0)^{2^{n+1} - 1} \left[\max_t (v(t) - u(t))\right]^{(1+\gamma)^{n+1}} (t_1 - t_0).$$

У випадку, коли існує похідна $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$, можна прийняти

$$a_1(t, y_n) - \alpha_1(t, y_n) = \frac{\partial f(t, y_n)}{\partial x},$$

а також

$$a_1(t, y) = \frac{\partial f(t, y_n)}{\partial x}. \tag{15}$$

Якщо при цьому $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ задовольняє умову Ліпшиця щодо x,

$$\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial x}-\frac{\partial f(t,z)}{\partial x}\right|\leqslant l|y-z|,$$

то оцінка (14) співпадає з відомою оцінкою збіжності методу Чаплигіна.

Зауважимо, що у формулах (3) можна було б взяти $\alpha_1(t,y)\equiv 0$. Отриманий при цьому алгоритм має вигляд

$$\begin{gathered}y'_{n+1}=a_1(t,y_n)(y_{n+1}-y_n)+f(t,y_n),\\ z'_{n+1}=a_1(t,y_n)(z_{n+1}-z_n)+f(t,z_n),\\ y_0=u,\quad z_0=v,\\ y_{n+1}(t_0)z_{n+1}(t_0)=x_0,\end{gathered}\tag{16}$$

який при виборі $a_1(t,y)$ за формулою (15) перетворюється в один з різновидів методів чаплигінського типу. На перший погляд видається слушним вважати (16) різновидом монотонного методу Ньютона. Однак у такому випадку основний варіант методу Ньютона мав би виглядати так

$$\begin{aligned}y'_{n+1}&=a_1(t,y_n)(y_{n+1}-y_n)+f(t,y_n),\\ z'_{n+1}&=a_1(t,z_n)(z_{n+1}-z_n)+f(t,z_n)\quad(n=0,1,\ldots).\end{aligned}\tag{17}$$

Система (17) отримана із системи (16) заміною у другому з рівнянь функції $a_1(t,y_n)$ функцією $a_1(t,z_n)$. Це призводить до того, що ітераційному процесові (17) невластива двосторонність ні за якого вибору початкового наближення $y_0(t)$, $z_0(t)$. Для алгоритму (16) придатна схема дослідження, яка використана для алгоритму (3). Зауважимо, що заміна обидвох рівнянь системи (16) рівняннями

$$\begin{aligned}y'_{n+1}&=a_1(t,z_n)(y_{n+1}-y_n)+f(t,y_n),\\ z'_{n+1}&=a_1(t,z_n)(z_{n+1}-z_n)+f(t,z_n)\end{aligned}\tag{18}$$

призводить до того, що алгоритм (18), (3′) має властивість двосторонності за дещо інших припущень щодо функції $a_1(t,x)$.

Теорема 4. *Якщо в умові H_1 замість неспадання $a_1(t,x)$ щодо x вимагати її незростання та зберегти всі інші умови теорем 1 та 2, то для ітераційного процесу, побудованого за допомогою формул*

$$\begin{gathered}y'_{n+1}=a_1(t,z_n)(y_{n+1}-y_n)+f(t,y_n),\quad y_0=u,\\ z'_{n+1}=a_1(t,z_n)(z_{n+1}-z_n)+f(t,z_n),\quad z_0=v,\\ y_{n+1}(t_0)=z_{n+1}(t_0)=x_0,\end{gathered}\tag{19}$$

можна обґрунтувати такі самі висновки, як ті, що містять теореми 1 та 2.

Доведення лише незначними деталями відрізняється від доведення теорем 1 та 2.□

Розглянемо інший двосторонній ітераційний процес, який також можна вважати одним із варіантів методів чаплигінського типу. Для його побудови використаємо такі аналоги умов H_1 та H_2.

Умова H_4. *Задані неперервні при $t\in[t_0,t_1]$, невід'ємні неспадні щодо x функції $a_2(t,x)$, $\alpha_2(t,x)$, для яких із співвідношень $t\in[t_0,t_1]$, $y\leqslant z$, $y,z\in S(x_0)$, випливає нерівність*

$$f(t,z)-f(t,y)\leqslant-[a_2(t,y)+\alpha_2(t,y)](z-y).\tag{20}$$

Умова H_5. *Існують неперервно диференційовні при $t\in[t_0,t_1]$ функції $u(t)$, $v(t)$, для яких виконується співвідношення (2′) та*

$$u'(t)\leqslant f(t,v(t)),\quad v'(t)\geqslant f(t,u(t))\quad(t\in[t_0,t_1]).$$

Побудуємо послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$, означаючи на кожному кроці ітераційного процесу $(y_{n+1}(t),z_{n+1}(t))$ як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{gathered}y'_{n+1}=-a_2(t,y_n)(z_{n+1}-z_n)+f(t,z_n),\\ z'_{n+1}=-(a_2(t,y_n)+\alpha_2(t,y_n))(y_{n+1}-y_n)+f(t,y_n)\end{gathered}\tag{21}$$

з початковою умовою (3′).

Теорема 5. *Якщо справджуються умови H_4 та H_5, то для ітераційного процесу (21), (3′) мають місце співвідношення (4).*

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, застосовуєм метод математичної індукції. При $k=0$ співвідношення (4) очевидні.З припущення, що вони мають місце при $k=n-1$, одержуємо

$$\begin{gathered}y'_{n+1}-y'_n=-a_2(t,y_n)(z_{n+1}-z_n)+f(t,z_n)+a_2(t,y_{n-1})(z_n-z_{n-1})-f(t,z_{n-1})\geqslant\\ -a_2(t,y_n)(z_{n+1}-z_n)+a_2(t,y_{n-1})(z_n-z_{n-1})+a_2(t,z_n)(z_{n-1}-z_n)+\\ \alpha_2(t,z_n)(z_{n-1}-z_n)\geqslant a_2(t,y_n)(z_n-z_{n+1})+[a_2(t,z_n)-a_2(t,y_{n-1})](z_{n-1}-z_n)\geqslant\\ a_2(t,y_n)(z_n-z_{n+1}),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}z'_{n+1}-z'_n=-a_2(t,y_{n-1})(y_n-y_{n-1})-\alpha_2(t,y_{n-1})(y_n-y_{n-1})+\\ [a_2(t,y_n)+\alpha_2(t,y_n))](y_{n+1}-y_n)+f(t,y_{n-1})-f(t,y_n)\geqslant\\ -a_2(t,y_{n-1})(y_n-y_{n-1})-a_2(t,y_{n-1})(y_n-y_{n-1})+[a_2(t,y_n)+\beta_2(t,y_n)]\times\\ (y_{n+1}-y_n)+a_2(t,y_{n-1})(y_n-y_{n-1})+\alpha_2(t,y_{n-1})(y_n-y_{n-1})=\\ [a_2(t,y_n+\alpha_2(t,y_n)](y_{n+1}-y_n).\end{gathered}$$

Застосовуючи теорему про системи диференціальних нерівностей та умову (3′), із співвідношень

$$y'_{n+1}-y'_n\geqslant a_2(t,y_n)(z_n-z_{n+1}),$$

$$z'_{n+1} - z'_n \geqslant [a_2(t, y_n + \alpha_2(t, y_n))](y_{n+1} - y_n)$$

отримуємо, що

$$y_n(t) \leqslant y_{n+1}(t), z_{n+1}(t) \leqslant z_n(t) \quad (t \in [t_0, t_1]). \tag{22}$$

Переконаємося, що

$$y_{n+1}(t) \leqslant z_{n+1}(t) \quad (t \in [t_0, t_1]). \tag{23}$$

З (21) та умови H_4 отримуємо

$$z'_{n+1} - y'_{n+1} = a_2(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) - a_2(t, y_n)(z_n - y_n) + \alpha_2(t, y_n)(y_{n+1} - y_n) +$$

$$f(t, y_n) - f(t, z_n) \geqslant a_2(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) + \alpha_2(t, y_n)(y_{n+1} - y_n) + a_2(t, y_n)(z_n - y_n) +$$

$$\alpha_2(t, y_n)(z_n - y_n) \geqslant a_2(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}).$$

Використовуючи теорему 5 про диференціальні нерівності, приходимо до співвідношень (23). Поєднанням нерівностей (22), (23) завершуємо доведення теореми. □

Теорема 6. *Нехай виконані умови H_4 та H_5 і задача (1) має неперервно диференційовний на $[t_0, t_1]$ розв'язок $x(t)$, а задача*

$$y'(t) = f(t, z(t)), \quad z'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = z(t_0) = x_0 \tag{24}$$

може мати не більше як один розв'язок $(y(t), z(t))$ з неперервно диференційовними на $[t_0, t_1]$ компонентами $y(t)$, $z(t)$. Тоді для єдиного неперервно диференційовного на $[t_0, t_1]$ розв'язку $x(t)$ задачі (1) матимемо оцінки (5).

Доведення. Монотонність та рівномірна збіжність ітераційного процесу (21), (3′) на $[t_0, t_1]$ до $y(t)$, $z(t)$ ґрунтується на схожих з використаними для доведення теореми 2 міркуваннях для алгоритму (3), (3′). Очевидно, що пара функцій $(y(t), z(t))$ є розв'язком задачі (24). З існування розв'язку $x(t)$ задачі (1) і структури системи диференціальних рівнянь в задачі (24) випливає, що $(x(t), x(t))$ також є розв'язком цієї задачі. Задача (24) має єдиний розв'язок, тому $y(t) = z(t) = x(t)$ $(t \in [t_0, t_1])$. Звідси робимо висновок, що співвідношення (5) справджується. □

Теорема 6, як і теорема 2, не дає засобів для оцінки швидкості збіжності ітераційного процесу.

Література

1. Курпель Н.С. Просиционно-итеративные методы решения систем уравнений. – К: Наукова думка, 1968. – 243 с.
2. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. – Киев: Наукова думка, 1980. – 267 с.
3. Лучка А.Ю. Просиционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – К: Наукова думка, 1980. – 264 с.
4. Марчук Г.И., Агошков В.И. ВВедение в просиционно-сеточные методы. – М: Наука, 1981. – 416 с.
5. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в истории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К: Наукова думка, 1992. – 277 с.

6. Чуйко С.М. *Ускорение итерационной процедуры для критической краевой задачи методом Ньютона-Канторовича*// Дванадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Кравчука. Матеріали конференції. – Київ, 2008. – 436.
7. Шувар Б.А. *Двусторонние итерационные методы решения нелинийных уравнений в полуупорядоченных пространствах*// Второй симпозиум по методам решения нелинийных уравнений и задач оптимизации. – Таллин: Институт кибернетики АН ЭССР, 1981. – С.68-73.
8. Шувар Б.А., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. Двосторонні наближені методи. – Івано-Франківськ: Видавничо-дизайнерський відділ Центру інформаційних технологій Прикарпатського національного університету імені Василя стефаника, 2007.– 515 с.
9. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Utrecht, Boston, VSP, 2004, 317 p.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 17.11.2009

Kopach M.I., Obshta A.F., Shuvar B.A. *Both-side approximation of solutions of differential equations.*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 172–179.

Both-side algorithms analogs of the Chaplygin method for ordinary differential equations. Conditions of algorithms squared convergence even in the case of operator nondifferentiability have been established.

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Двусторонняя аппроксимация решений дифференциальных уравнений // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 172–179.

Исследовано двусторонние итерационные алгоритмы, которые являются аналогами методу Чаплигина для обыкновенных дифференциальных уравнений. Установлены условия, при выполнении которых эти методы могут иметь квадратичную сходимость даже в случае недиференцируемости оператора.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 517.956.4

Малицька Г.П.

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Малицька Г.П. *Системи рівнянь типу Колмогорова другого порядку // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 180–190.

Розглянуто один клас ультрапараболічних систем рівнянь другого порядку, що мають чотири групи змінних, за якими є виродження, і коефіцієнти залежать тільки від часової змінної, побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші, одержано оцінки цієї матриці та всіх її похідних.

Ця стаття є продовженням робіт [2–3], де розглянуто системи вироджених параболічних рівнянь колмогоровського типу з коефіцієнтами, залежними тільки від часової змінної. Зауважимо, детальний опис досліджень і розвитку теорії вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з трьома групами змінних, за якими є виродження параболічності, зроблено в роботі С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, А.М. Кочубея [5]. Ми розглянули системи рівнянь колмогоровського типу другого порядку, що мають чотири групи виродження параболічності з коефіцієнтами, залежними від часової змінної, встановили існування і єдиність фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК), дослідили властивості і оцінки похідних ФМРЗК.

1 Позначення і постановка задачі Коші

Нехай n, n_j – фіксовані натуральні числа, $n_j \geq n_{j+1}$ для $j = \{1,2,3\}$, $\sum\limits_{j=1}^{4} n_j = n_0$, $p = \sum\limits_{j=1}^{4}(2j-1)n_j$; $x \in \mathbb{R}^{n_0}$, $x = (x_1, \ldots, x_4)$, $x_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $s \in \mathbb{R}^{n_0}$, $(x,s) = \sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{m=1}^{n_j} x_{jm}s_{jm}$, $\bar{x}_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jn_{j+1}})$, $\bar{\bar{x}}_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jn_{j+2}})$, $x'_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jn_4})$, $x''_j = (x_{jn_4+1}, \ldots, x_{jn_3})$, $x'''_j = (x_{jn_3+1}, \ldots, x_{jn_2})$, $x^*_j = (x_{jn_{j+1}+1}, \ldots, x_{jn_j})$, $x' = (x'_1, x'_2, x'_3, x_4)$, $\rho(t,x;\tau,\xi) = |x_1 - \xi_1|^2/4(t-\tau) + 3|x_2 + (\overline{x}_1 + \overline{\xi}_1)(t-\tau)/2 - \xi_2|^2(t-\tau)^{-3} + 180|x_3 + (t-\tau)(\bar{x}_2 + \bar{\xi}_2)/2 + (\bar{\bar{x}}_1 - \bar{\bar{\xi}}_1)(t-\tau)^2/12 - \xi_3|^2(t-\tau)^{-5} + 63000|x_4 + (\bar{x}_3 + \bar{\xi}_3)(t-\tau)/2 + (\bar{\bar{x}}_2 - \bar{\bar{\xi}}_2)(t-\tau)^2/10 + (\bar{\bar{x}}_1 + \bar{\bar{\xi}}_1)(t-\tau)^3/120 - \xi_4|^2(t-\tau)^{-7})$, $\xi \in \mathbb{R}^{n_0}$,

$$d(t,x;\tau,y) = \sum_{j=1}^{4} |x_j - y_j|^2 (t-\tau)^{-(2j-1)}.$$

Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\partial_t u_r(t,x) - \sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}} x_{jm}\partial_{x_{j+1m}} u_r(t,x) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1} [a^{rl}_{km}(t,x)\partial^2_{x_{1m}x_{1k}} + a^{rl}_m(t,x)\partial_{x_{1m}} + a^{rl}_0(t,x)]u_l(t,x), r = \{1, \ldots, n\}, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де $\Pi_{(0,T]} = \{(t,x), t \in (0,T], T > 0, x \in \mathbb{R}^{n_0}\}$. Припускатимемо, що коефіцієнти $a^{rl}_{km}(t,x)$, $a^{rl}_m(t,x), a^{rl}_0(t,x)$ цієї системи – комплекснозначні функції, такі що

$$\partial_t w_r(t,x) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1} [a^{rl}_{km}(t,x)\partial^2_{x_{1m}x_{1k}} + a^{rl}_m(t,x)\partial_{x_{1m}} + a^{rl}_0(t,x)]w_r(t,x), r = \{1, \ldots, n\}, \tag{2}$$

тобто система (2) є рівномірно параболічною за Петровським у замиканні $\Pi_{[0,T]}$ множини $\Pi_{(0,T]}$, в якій (x_2, x_3, x_4) вважаються параметрами.

Будемо розглядати такі системи, що

$$a^{rl}_{km}(t,x) = a^{lr}_{km}(t,x), \quad a^{rl}_m(t,x) = a^{lr}_m(t,x), \quad a^{rl}_0(t,x) = a^{lr}_0(t,x). \tag{3}$$

Для зручності запишемо систему (1) у матричній формі

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{j=1}^{3} \bar{x}_j \partial_{x_{j+1}} u(t,x) = \sum_{|k|\leq 2} a_k(t,x)\partial^k_{x_1} u(t,x).$$

Знайдемо розв'язок системи (1), який задовольняє початкову умову

$$u(t,x)|_{t=\tau} = u_0(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^{n_0}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \tag{4}$$

де τ-задане число, $u_0(t,x) := col(u_1(x), \ldots, u_0(x))$ – задана матриця-стовпчик.

Означення 1. *Під ФМРЗК (1),* (4) *будемо розуміти квадратну матрицю* $G(t,x;\tau,y)$, $\{x,y\} \subset \mathbb{R}^{n_0}$, $0 \leq \tau < t \leq T$, *порядку* n *таку, що для будь-якої гладкої фінітної функції* $u_0(t,x)$ *та довільного* $\tau \in [0,T]$ *формулою* $u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n_0}} G(t,x;\tau,y)u_0(y)dy$, $(t,x) \in \Pi_{(\tau,T]}$, *визначається розв'язок системи (1), який задовольняє початкову умову* (4).

2 Розв'язання задачі Коші для системи із коефіцієнтами залежними тільки від t:

Розглянемо задачу Коші для системи (1), в якої коефіцієнти $a^{rl}_{km}(t), a^{lr}_m(t), a^{lr}_0(t)$ – неперервні функції на $[0,T]$.

$$\partial_t u_r(t,x) - \sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}} x_{jm}\partial_{x_{j+1m}} u_r(t,x) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1} [a^{rl}_{km}(t)\partial^2_{x_{1m}x_{1k}} + a^{rl}_m(t)\partial_{x_{1m}} + a^{rl}_0(t)]u_l(t,x), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^{n_0}, \quad r = \{1, \ldots, n\}. \tag{5}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 42A38, 46H30.

Ключові слова і фрази: фундаментальна матриця розв'язків, задача Коші, система рівнянь типу Колмогорова.

© Малицька Г.П., 2009

$$u_r(t,x)|_\tau = u_{0r}(x), x \in \mathbb{R}^{n_0}, \quad r = \{1,...,n\}, \tag{6}$$

де $u_{0r}(x)$ – досить гладкі фінітні функції. Припускатимемо, що λ – корені $\lambda_1, ..., \lambda_n$ рівняння $det(A(is_1)^2 - \lambda I) = 0$, де $A = (\sum\limits_{k,m=1}^{n_1} a_{km}^{rl}(t))_{r,l=1}^n$, I – одинична матриця порядку n, i – уявна одиниця, задовольняють умову:
$Re\lambda_r(s_1) \leq -\delta_0|s_1|^2, \quad s_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad r = \{1,...,n\}$ з деякою сталою $\delta_0 > 0$, незалежною від t, $0 \leq \tau < t \leq T$.

Зведемо задачу Коші (5), (6) до задачі Коші для систем диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку. Для цього компоненти $u_1, ..., u_n$ розв'язку задачі Коші (5), (6) будемо шукати у вигляді оберненого перетворення Фур'є по s від невідомих функцій $v_1, ..., v_n$, тобто

$u_r(t,x) := F^{-1}[v_r(t,s)](t,x) := (2\pi)^{-n_0} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_0}} \exp\{i(x,s)\} v_r(t,s) ds, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^{n_0}, \quad r = \{1,...,n\}$. Враховуючи рівності

$\partial_t F^{-1}[v_r] = F^{-1}[\partial_t v_r], x_{jm}\partial_{x_{j+1,m}} F^{-1}[v_r] = F^{-1}[-s_{j+1,m}\partial_{s_{j,m}} v_r]$,

$\partial^2_{x_{1k}x_{1m}} F^{-1}[v_r] = F^{-1}[(is_{1m})(is_{1k})v_r] = F^{-1}[-s_{1m}s_{1k}v_r]$,

одержимо для $v_1, ..., v_n$ таку задачу Коші

$$\partial_t v_r(t,s) + \sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}} s_{j+1,m}\partial_{s_{jm}} v_r(t,s) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1} [-a_{km}^{rl}(t)s_{1m}s_{1k} +$$
$$a_m^{rl}(t)s_{1m} + ia_0^{rl}(t)]v_r(t,s), 0 \leq \tau < t \leq T, \quad s \in \mathbb{R}^{n_0}, \quad r = \{1,...,n\}. \tag{7}$$

$$v_0(t,s)|_{t=\tau} = v_{0r}(s), \quad s \in \mathbb{R}^{n_0}, \quad r = \{1,...,n\}, \tag{8}$$

Оскільки функції $u_{0r}(x)$ досить гладкі і фінітні, то їх перетворення Фур'є є аналітичними функціями, для яких справджуються нерівності:

$|v_{0r}(s)| \leq C(1 + |s|)^m, \quad s \in \mathbb{R}^{n_0}, \quad m \geq n_0 + 1$, де

$$v_{0r}(s) := F[u_0(x)] = \int_{\mathbb{R}^{n_0}} \exp\{-i(x,s)\} u_{0r}(x) dx. \tag{9}$$

У задачі (7), (8) s – параметр. Система (7) є системою диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку, які мають однакові головні частини. Згідно [3,с. 146-148], така система еквівалентна однорідному лінійному диференціальному рівнянню

$$\partial_t w + \sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}} s_{j+1,m}\partial_{s_{jm}} w - \sum_{r,l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1} [-a_{km}^{rl}(t)s_{1m}s_{1k} + ia_m^{rl}(t)s_{1m} + a_0^{rl}(t)]v_r\partial_{v_l} w = 0$$

з частинними похідними першого порядку для фукнкції w від $n+1+n_0-n_1$ незалежних змінних $t, s_{11}, ..., s_{1n_2}, s_{21}, ..., s_{2n_3}, s_{31}, ..., s_{3n_4}, v_1, ..., v_n$, яке в свою чергу, як відомо, еквівалентне системі звичайних диференціальних рівнянь

$$dt = \frac{ds_{11}}{s_{21}} = ... = \frac{ds_{1n_2}}{s_{2n_2}} = \frac{ds_{21}}{s_{31}} = ... = \frac{ds_{2n_3}}{s_{3n_3}} = \frac{ds_{31}}{s_{41}} = ... = \frac{ds_{3n_4}}{s_{4n_4}} =$$
$$\frac{dv_1}{\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{k,m=1}^{n_1} [-a_{km}^{1l}(t)s_{1m}s_{1k} + ia_m^{1l}(t)s_{1m} + a_0^{1l}(t)]v_l} = ... =$$
$$\frac{dv_n}{\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{k,m=1}^{n_1} [-a_{km}^{nl}(t)s_{1m}s_{1k} + ia_m^{nl}(t)s_{1m} + a_0^{nl}(t)]v_l}.$$

Ця система містить $\sum\limits_{j=2}^{n} n_j + n + 1$ рівнянь. Шукаємо $\sum\limits_{j=2}^{4} n_j + n + 1$ незалежних інтегралів. З рівнянь $dt = \frac{ds_{3j}}{s_{4j}}$, $j = \{1, ..., n_4\}$ знаходимо

$$s_{3j} = ts_{4j} + c'_{1j}, \quad j = \{1,...,n_4\}, \tag{10}$$

із $dt = \frac{ds_{2j}}{s_{3j}}$, $j = \{1,...,n_4\}$, враховуючи (10), маємо

$$s_{2j} = t^2 s_{4j}/2 + tc'_{1j} + c'_{2j}, \tag{11}$$

а із $dt = ds_{1j}/s_{2j}$, $j = \{1,...,n_4\}$ і (11), одержимо

$$s_{1j} = t^3 s_{4j}/6 + t^2 c'_{1j}/2 + tc'_{2j} + c'_{3j}. \tag{12}$$

При $j = \{n_4+1,...,n_3\}$ із $dt = ds_{2j}/s_{3j}$ маємо

$$s_{2j} = ts_{3j} + c''_{1j}, \tag{13}$$

тому із $dt = ds_{1j}/s_{2j}$ при $j = \{n_4+1,...,n_3\}$ –

$$s_{1j} = t^2 s_{3j}/2 + tc''_{1j} + c''_{2j}. \tag{14}$$

Розглядаючи $j = \{n_3+1,...,n_2\}$, із $dt = ds_{1j}/s_{2j}$ одержимо

$$s_{1j} = ts_{2j}/2 + c'''_{1j}. \tag{15}$$

Враховуючи (10)–(15), запишемо

$$s_1 = (s_{11},...,s_{1n_1}) = (t^3 s_{4j}/6 + t^2 c'_{11}/2 + tc'_{21} + c'_{31}, ..., t^3 s_{4n_4}/6 + t^2 c'_{1n_4}/2 + tc'_{2n_4} +$$
$$c'_{3n_4}, t^2 s_{3n_4+1}/2 + tc''_{1n_4+1} + c''_{2n_4+1}, ..., t^3 s_{3n_3}/2 + tc''_{1n_3} + c''_{2n_3}, ts_{2n_3+1} +$$
$$c'''_{1n_3+1}, ..., ts_{2n_2} + c'''_{1n_2}, s_{1n_2+1}, ..., s_{1n_1}) := P_1(t, s_4, c'; s_3^*, c''; s_2^*, c'''; s_1^*), \tag{16}$$

$$s_2 = (s_{21},...,s_{2n_2}) = (t^2 s_{41}/2 + c'_{11} + c'_{21}, ..., t^2 s_{4n_4}/2 + tc'_{1n_4} + c'_{2n_4}, ts_{3n_4+1}/2 +$$
$$c''_{1n_4+1}, ..., t^3 s_{3n_3} + c''_{1n_3}, s_{2n_3+1}, ..., s_{2n_2}) := P_2(t, s_4, c'_1, c'_2; s_3^*, c''_1; s_2^*), \tag{17}$$

$$s_3 = (ts_{41} + c'_{11}, ..., ts_{4n_4} + c'_1, s_{3n_4+1}, ..., s_{3n_3}) := P_3(t, s_4, c'_1; s^*_3), \quad s_4 \in \mathbb{R}^{n_4}. \tag{18}$$

Підставимо (16)-(18) в систему рівнянь

$$dv = \sum_{|k|\le 2} a_k(t)(is_1)^k v dt, \tag{19}$$

одержимо систему рівнянь (19) на характеристиках (10)–(15)

$$dv(t, P_1(t, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1), P_2(t, s_4, c'_1, c'_2; s^*_3, c''_1; s^*_2), P_3(t, s_4, c'_1; s^*_3), s_4) =$$
$$\sum_{|k|\le 2} a_k(t)(iP_1(t, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1))^k v dt \tag{20}$$

з початковою умовою

$$v(t, P_1(t, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1), P_2(t, s_4, c'_1, c'_2; s^*_3, c''_1; s^*_2), P_3(t, s_4, c'_1; s^*_3), s_4)|_{t=\tau} =$$
$$v_0(P_1(\tau, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1), P_2(\tau, s_4, c'_1, c'_2; s^*_3, c''_1; s^*_2), P_3(\tau, s_4, c'_1; s^*_3), s_4). \tag{21}$$

Задача (20),(21) має єдиний розв'язок для $0 \le \tau < t \le T < +\infty$. Врахувавши умови (3), маємо, що матриця $\sum\limits_{|k|\le 2} a_k(t)(iP_1(t, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1))^k$ комутує з матрицею $\sum\limits_{|k|\le 2} \int\limits_\tau^t a_k(\beta)(iP_1(\beta, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1))^k d\beta$, тому розв'язок задачі Коші (20),(21) має вигляд

$$v(t, P_1(t, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1), P_2(t, s_4, c'_1, c'_2; s^*_3, c''_1; s^*_2), P_3(t, s_4, c'_1; s^*_3), s_4)|_{t=\tau} =$$
$$\exp\{\sum_{|k|\le 2} \int_\tau^t a_k(\beta)(iP_1(\beta, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1))^k d\beta\} v_0(P_1(\tau, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2,$$
$$c'''; s^*_1), P_2(\tau, s_4, c'_1, c'_2; s^*_3, c''_1; s^*_2), P_3(\tau, s_4, c'_1; s^*_3), s_4), \quad 0 \le \tau < t \le T. \tag{22}$$

Знайдемо c', c'', c''' із (10)–(15):

$$c'_{1j} = s_{3j} - ts_{41}, c'_{2j} = s_{2j} - ts_{3j} + t^2 s_{4j}/2,$$

$$c'_{3j} = s_{1j} - ts_{2j} + t^2 s_{3j}/2 - t^3 s_{4j}/6, \quad j = \{1, ..., n_4\}, \tag{23}$$

$$c''_{1j} = s_{2j} - ts_{3j}, c''_{2j} = s_{1j} - ts_{2j} + t^2 s_{3j}/2, \quad j = \{n_4 + 1, ..., n_3\}, \tag{24}$$

$$c'''_{1j} = s_{1j} - ts_{2j}, \quad j = \{n_3 + 1, ..., n_2\}. \tag{25}$$

Підставивши (23)–(25) в $P_1(\tau, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1)$, маємо

$\tau^3 s_{4j}/6 + c'_{1j}\tau^2 + c'_{2j}\tau + c'_{3j} = s_{1j} - (t-\tau)s_{2j} + (t-\tau)^2 s_{3j}/2 - (t-\tau)^3 s_{4j}/6 := \alpha'_{1j}(t - \tau, s_{1j}, s_{2j}, s_{3j}, s_{4j}), \quad j = \{1, ..., n_4\}$;

$\tau^2 s_{3j}/2 + c''_{1j}\tau + c'_{2j} = s_{1j} - (t-\tau)s_{2j} + (t-\tau)^2 s_{3j}/2 := \alpha''_{1j}(t-\tau, s_{1j}, s_{2j}, s_{3j}), \quad j = \{n_4 + 1, ..., n_3\}$;

$\tau s_{2j} + c'''_{1j} = s_{1j} - (t-\tau)s_{2j} := \alpha'''_{1j}(t-\tau, s_{1j}, s_{2j}), j = \{n_3 + 1, ..., n_2\}$, або скорочено запишемо

$$\alpha_1(t-\tau, s) = (\alpha'_1(t-\tau, s'), \alpha''_1(t-\tau, s''), \alpha''_1(t-\tau, s''), s^*_1). \tag{26}$$

Враховуючи (25), (26), одержимо

$$v(t,s) = \exp\{\int_\tau^t \sum_{|k|\le 2} a_k(\beta)(i\alpha_1(t-\beta, s))^k d\beta\} v_0(s'_1 - (t-\tau)s'_2 + (t-\tau)^2 s'_3/2 -$$
$$(t-\tau)^3 s_4/6, s''_1 - (t-\tau)s''_2 + (t-\tau)^2 s_3/2, s'''_1 - (t-\tau)s_2, s^*_1, s'_2 + (t-\tau)s'_3 +$$
$$(t-\tau)^2 s_4/2, s''_2 + (t-\tau)s_3, s^*_2, s'_3 - (t-\tau)s_4, s^*_3, s_4). \tag{27}$$

За побудовою формулою (27) виражається розв'язок задачі Коші для системи (7) з початковою умовою (8) і тому $u(t,x)$ – розв'язок задачі (5), (6) має вигляд

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n_0} \int_{R^{n_0}} \exp\{i(x,s) + \int_\tau^t \sum_{|k|\le 2} a_k(\beta)(i\alpha_1(t-\beta, s))^k d\beta\} v_0(s'_1 - (t-\tau)s'_2 +$$
$$(t-\tau)^2 s'_3/2 - (t-\tau)^3 s_4/6, s''_1 - (t-\tau)s''_2 + (t-\tau)^2 s_3/2, s'''_1 - (t-\tau)s_2,$$
$$s^*_1, s'_2 - (t-\tau)s'_3 + (t-\tau)^2 s_4/2, s''_2 - (t-\tau)s_3, s^*_2, s'_3 - (t-\tau)s_4, s^*_3, s_4) ds. \tag{28}$$

У інтегралі (28), зробивши заміну змінних,

$s'_1 - (t-\tau)s'_2 + (t-\tau)^2 s'_3/2 - (t-\tau)^3 s_4/6 = y'_1, \quad s''_1 - (t-\tau)s''_2 + (t-\tau)^2 s_3/2 = y''_1, \quad s'''_1 - (t-\tau)s_2 = y'''_1, \quad s^*_1 = y^*_1, \quad s'_2 - (t-\tau)s'_3 + (t-\tau)^2 s_4/2 = y'_2, \quad s''_2 - (t-\tau)s_3 = y''_2, \quad s^*_2 = y^*_2, \quad s'_3 - (t-\tau)s_4 = y'_3, \quad s^*_3 = y^*_3, \quad s_4 = y_4$, матимемо

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n_0} \int_{R^{n_0}} \exp\{i(x_1, y_1) + i(x_2 + \bar{x}_1(t-\tau), y_2) + i(x_3 + \bar{x}_2(t-\tau) +$$
$$(t-\tau)^2 \bar{\bar{x}}_1/2, y_3) + i(x_4 + \bar{x}_3(t-\tau) + \bar{\bar{x}}_2(t-\tau)^2/2 + x'_1(t-\tau)^3/6, y_4) +$$
$$\int_\tau^t \sum_{|k|\le 2} a_k(\beta)(i\tilde{\alpha}_1(\beta-\tau, y))^k d\beta\} v_0(y) dy, \tag{29}$$

де $\tilde{\alpha}_1(\beta-\tau, y) := (y'_1 + (\beta-\tau)y'_2 + y'_3(\beta-\tau)^2/2 + y_4(\beta-\tau)^3/6, \quad y''_1 + (\beta-\tau)y''_2 + y_3(\beta-\tau)^2/2; y'''_1 + (\beta-\tau)y_2, y^*_1)$.

Матриця $Q(t,\tau,y) := \exp\{\int_\tau^t \sum\limits_{|k|\le 2} a_k(\beta)(i\tilde{\alpha}_1(\beta-\tau, y))^k d\beta\}$ – нормальна матриця системи $\frac{dv}{dt} = \sum\limits_{|k|\le 2} a_k(t)(i\tilde{\alpha}_1(t-\tau, y))^k v$, $Q(t,\tau,y)|_{t=\tau} = I$.

У інтегралі (29) зробимо заміну змінних $y_j(t-\tau)^{(2j-1)/2} = \sigma_j, \quad j = \{1, ..., 4\}$,

$\beta-\tau=\theta(t-\tau)$, тоді

$$u(t,x)=(2\pi)^{-n_0}(t-\tau)^{-p/2}\int_{R^{n_0}}\exp\{i(x_1(t-\tau)^{-1/2},\sigma_1)+i(x_2+\bar{x}_1(t-\tau))(t-\tau)^{-3/2},$$
$$\sigma_2)+i((x_3+\bar{x}_2(t-\tau)+\bar{\bar{x}}_1(t-\tau)^2/2)(t-\tau)^{-5/2},\sigma_3)+i((x_4+\bar{x}_3(t-\tau)+\bar{\bar{x}}_2(t-\tau)^2/2+$$
$$x_1'(t-\tau)^3/6)(t-\tau)^{-7/2},\sigma_4)+\int_0^1\sum_{|k|\le 2}a_k(\theta(t-\tau)+\tau)i^k\tilde{\alpha}^k(\theta(t-\tau),\sigma_1(t-\tau)^{-1/2},$$
$$\sigma_2(t-\tau)^{-3/2},\sigma_3(t-\tau)^{-5/2},\sigma_4(t-\tau)^{-7/2})d\theta(t-\tau)\}v_0(\sigma_1(t-\tau)^{-1/2},\sigma_2(t-\tau)^{-3/2},$$
$$\sigma_3(t-\tau)^{-5/2},\sigma_4(t-\tau)^{-7/2})d\sigma,\quad 0\le\tau<t\le T,\quad x\in\mathbb{R}^{n_0}. \tag{30}$$

Далі буде доведена оцінка матриці
$Q_1 := \exp\{\sum_{|k|\le 2}\int_0^1 a_k i^k\tilde{\alpha}^k(\theta(t-\tau),\sigma_1(t-\tau)^{-1/2},\sigma_2(t-\tau)^{-3/2},\sigma_3(t-\tau)^{-5/2},\ \sigma_4(t-\tau)^{-7/2})d\theta(t-\tau)\}$, а саме

$$|Q_1|\le C\exp\{-c_0[|\sigma_1'+\sigma_2'/2+\sigma_3'/6+\sigma_4/24|^2+|\sigma_1''+\sigma_2''/2+\sigma_3/6|^2+|\sigma_1'''+\sigma_2/2|^2+$$
$$|\sigma_3^*|^2+|\sigma_2'+\sigma_3'/2+3\sigma_4/20|^2+|\sigma_2''+\sigma_3/2|^2+|\sigma_2^*|^2+|\sigma_3'+\sigma_4/2|^2+|\sigma_3^*|^2+|\sigma_4|^2]\}, \tag{31}$$

де C, c_0 – додатні сталі, $c_0<\delta_0$, $\sigma\in R^{n_0}$, $0\le\tau<t\le T$.

Оскільки $Q(t,\tau,y)|_{y_j=\sigma_j(t-\tau)^{-(2j-1)/2}}=Q_1$, $j=\{1,...,4\}$, то
$|Q(t,\tau,y)|\le C\exp\{-c_0[(|y_1'+y_2'(t-\tau)/2+y_3'(t-\tau)^2/6+y_4(t-\tau)^3/24|^2+|y_1''+y_2''(t-\tau)/2+y_3(t-\tau)^2/6|^2+|y_1'''+y_2(t-\tau)/2|^2+|y_1^*|^2)(t-\tau)+(|y_2'+y_3'(t-\tau)/2+3y_4/20|^2+|y_2''+y_3(t-\tau)/2|^2+|y_2^*|^2)(t-\tau)^3+|y_3'+y_4(t-\tau)/2|^2+|y_3^*|^2)(t-\tau)^5+|y_4|^2(t-\tau)^7]\}$, $0\le\tau<t\le T$, $y\in R^{n_0}$.

Скориставшись виразом (9), оцінкою (31) і змінивши порядок інтегрування у формулі (30), одержимо

$$u(t,x)=\int_{R^{n_0}}G(t,x;\tau,\xi)u_0(\xi)d\xi, 0\le\tau<t\le T,\{\xi,x\}\subset R^{n_0}, \tag{32}$$

де

$$G(t,x;\tau,\xi)=(2\pi)^{-n_0}\int_{R^{n_0}}\exp\{i((x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2},\sigma_1)+i(x_2+\bar{x}_1(t-\tau)-\xi_2)\times$$
$$(t-\tau)^{-3/2},\sigma_2)+i((x_3-\xi_3+\bar{x}_2(t-\tau)+\bar{\bar{x}}_1(t-\tau)^2/2)(t-\tau)^{-5/2},\sigma_3)+i((x_4-\xi_4+$$
$$\bar{x}_3(t-\tau)+\bar{\bar{x}}_2(t-\tau)^2/2+x_1'(t-\tau)^3/6)(t-\tau)^{-7/2},\sigma_4)+\sum_{|k|\le 2}\int_0^1 a_k(\theta(t-\tau)+\tau)\times$$
$$i^k\tilde{\alpha}^k(\theta(t-\tau),\sigma_1(t-\tau)^{-1/2},\sigma_2(t-\tau)^{-3/2},\sigma_3(t-\tau)^{-5/2},\sigma_4(t-\tau)^{-7/2})d\theta(t-\tau)\}d\sigma. \tag{33}$$

3 Доведення оцінки (31) у випадку сталих коефіцієнтів

Дослідимо вираз

$$\int_0^1 a_k i^k\tilde{\alpha}^k(\theta(t-\tau),\sigma_1(t-\tau)^{-1/2},\sigma_2(t-\tau)^{-3/2},\sigma_3(t-\tau)^{-5/2},$$
$$\sigma_4(t-\tau)^{-7/2})d\theta(t-\tau)\},\quad |k|\le 2, \tag{34}$$

Для аналізу випишемо усі можливі інтеграли з (34).
Зокрема:

$$a)\ \int_0^1(\sigma_{1j}+\theta p_1\sigma_{2j}+\theta^2p_2\sigma_{3j}/2+\theta^3p_3\sigma_{4j}/6)d\theta=\sigma_{1j}+p_1\sigma_{2j}/2+p_2\sigma_{3j}/6+p_3\sigma_{4j}/24, \tag{35}$$

де, якщо 1) $(p_1,p_2,p_3)=(1,1,1)$, то $j=\{1,...,n_4\}$; 2) $(p_1,p_2,p_3)=(1,1,0)$, то $j=\{n_4+1,...,n_3\}$; 3) $(p_1,p_2,p_3)=(1,0,0)$, то $j=\{n_3+1,...,n_2\}$; 4) $(p_1,p_2,p_3)=(0,0,0)$, то $j=\{n_2+1,...,n_1\}$.

$$\int_0^1(\sigma_{1j}+\sigma_{2j}p_1\theta+\sigma_{3j}p_2\theta^2/2+\sigma_{4j}p_3\theta^3/6)(\sigma_{1m}+\sigma_{2m}q_1\theta+\sigma_{3m}q_2\theta^2/2+\sigma_{4m}q_3\theta^3/6)d\theta=$$
$$(\sigma_{1j}+p_1\sigma_{2j}/2+p_2\sigma_{3j}/6+p_3\sigma_{4j}/24)(\sigma_{1m}+q_1\sigma_{2m}/2+q_2\sigma_{3m}/6+q_3\sigma_{4m}/24)+(\sigma_{2m}q_1+$$
$$\sigma_{3m}q_2/2+3q_3\sigma_{4m}/20)(\sigma_{2j}p_1+\sigma_{3j}p_2/2+3\sigma_{4j}p_3/20)/12+$$
$$+\frac{(\sigma_{3m}q_2+\sigma_{4m}q_3/2)(p_2\sigma_{3j}+p_3\sigma_{4j}/2)}{720}+\frac{p_3q_3\sigma_{4m}\sigma_{4j}}{252000}, \tag{36}$$

де, якщо
1) $(p_1,p_2,p_3)=(q_1,q_2,q_3)=(1,1,1)$, то $m,j=\{1,...,n_4\}$;
2) $(p_1,p_2,p_3)=(1,1,1)$, $(q_1,q_2,q_3)=(1,1,0)$, то $m=\{n_4+1,...,n_3\}$, $j=\{1,...,n_4\}$;
3) $(p_1,p_2,p_3)=(1,1,1)$, $(q_1,q_2,q_3)=(1,0,0)$, то $m=\{n_3+1,...,n_2\}$, $j=\{1,...,n_4\}$;
4) $(p_1,p_2,p_3)=(1,1,1)$, $(q_1,q_2,q_3)=(0,0,0)$, то $m=\{n_2+1,...,n_1\}$, $j=\{1,...,n_4\}$;
5) $(p_1,p_2,p_3)=(1,1,0)$, $(q_1,q_2,q_3)=(1,1,0)$, то $m,j=\{n_4+1,...,n_3\}$;
6) $(p_1,p_2,p_3)=(1,0,0)$, $(q_1,q_2,q_3)=(1,1,0)$, то $m=\{n_4+1,...,n_3\}$, $j=\{n_3+1,...,n_2\}$;
7) $(p_1,p_2,p_3)=(q_1,q_2,q_3)=(1,1,0)$, то $m,j=\{n_3+1,...,n_2\}$;
8) $(p_1,p_2,p_3)=(0,0,0)$, $(q_1,q_2,q_3)=(1,0,0)$, то $j=\{n_2+1,...,n_1\}$, $m=\{n_3+1,...,n_2\}$;
9)$(p_1,p_2,p_3)=(q_1,q_2,q_3)=(0,0,0)$, то $m,j=\{n_2+1,...,n_1\}$.

Проаналізувавши вирази (35)–(36), прийдемо до висновку, що, підставивши в $\sum\limits_{|k|\le 2}a_k(is_1)^k$ замість s_1 вектори μ,ν,ω,z з відповідними компонентами:

$\mu:\sigma_{1j}+\sigma_{2j}/2+\sigma_{3j}/6+\sigma_{4j}/24, j=\{1,...,n_4\},\sigma_{1j}+\sigma_{2j}/2+\sigma_{3j}/6, j=\{n_4+1,...,n_3\},\sigma_{1j}+\sigma_{2j}/2, j=\{n_3+1,...,n_2\},\sigma_{1j}^*, j=\{n_2+1,...,n_1\}$;

$\nu:\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sigma_{2j}+\sigma_{3j}/2+3\sigma_{4j}/20), j=\{1,...,n_4\},\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sigma_{2j}+\sigma_{3j}/2), j=\{n_4+1,...,n_3\},\sigma_{2j}, j=\{n_3+1,...,n_2\},\nu_{n_2+1}=0,...,\nu_{n_1}=0$;

$\omega:\frac{1}{12\sqrt{3}}\sigma_{4j}/2, j=\{1,...,n_4\},\omega_{n_3+1}=0,...,\omega_{n_1}=0$;

$z:\frac{1}{60\sqrt{7}}(\sigma_{3j}+\sigma_{4j}/2, j=\{1,...,n_4\},\frac{1}{12\sqrt{3}}\sigma_{3j}, j=\{n_4+1,...,n_3\},\sigma_{2j}, j=\{n_3+1,...,n_4\}$, $z_{n_4+1}=0,...,z_{n_1}=0$, і додавши результати, одержимо:

$$\sum_{|k|\le 2}a_ki^k(\mu^k+\nu^k+\omega^k+z^k)=\sum_{|k|\le 2}a_ki^k\int_0^1\tilde{\alpha}(\theta(t-\tau),\sigma_1(t-\tau)^{-1/2},$$
$$\sigma_2(t-\tau)^{-3/2},\sigma_3(t-\tau)^{-5/2},\sigma_4(t-\tau)^{-7/2})d\theta(t-\tau).$$

Оскільки, використавши параболічність, маємо $Re\lambda(\mu)\le-\delta_0|\mu|^2$, то

$$Re\lambda(\mu)\le-\delta_0(|\sigma_1^*|^2+|\sigma_1'''/2|^2+|\sigma_1''+\sigma_2''+\sigma_3/6|^2+|\sigma_1'+\sigma_2'+\sigma_3'+\sigma_4/24|^2).$$

Аналогічно $Re\lambda(\nu) \le -\delta_0(|\sigma'_{2j} + \sigma'_{3j}/2 + 3\sigma_4/20|^2 + |\sigma''_2 + \sigma_3/2|^2 + |\sigma'''_2/2|^2)/12;$

$$Re\lambda(\omega) \le -\delta_0(|\sigma'_3 + \sigma_4/2|^2 + |\sigma''_3|^2)/720; \quad Re\lambda(z) \le -\delta_0|\sigma_4|^2/252000.$$

Враховуючи оцінки $Re\lambda$, одержимо оцінку матриці $Q(t-\tau,\sigma)$

$$|\exp\sum_{|k|\le 2} a_k i^k(\mu^k + \nu^k + \omega^k + z^k)| \le C\exp\{-\delta_1[|\sigma^*_1|^2 + |\sigma'''_1/2|^2 + |\sigma''_1 + \sigma''_2 + \sigma_3/6|^2 + |\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 + \sigma_4/24|^2 + |\sigma'_{2j} + \sigma'_{3j}/2 + 3\sigma_4/20|^2 + |\sigma''_2 + \sigma_3/2|^2 + |\sigma'''_2/2|^2/12 + |\sigma'_3 + \sigma_4/2|^2 + |\sigma''_3|^2/720 + |\sigma_4|^2/252000]\}. \quad (37)$$

З (37) маємо (31), де $c_0 = \delta_1/25200,\ 0 < \delta_1 < \delta_0,\ C > 0$.

4 Встановлення оцінки (31) у випадку коефіцієнтів, залежних тільки від t

Для встановлення оцінки (31) використаємо підхід, застосований в [1], [4, с. 47-48]. Тому розглянемо систему

$$\frac{dQ(t,\tau,y)}{dt} = \sum_{|k|=2} a_k(t_0)(i\tilde{\alpha}(t-\tau,y))^k Q(t,\tau,y) + \{\sum_{|k|=2}[a_k(t) - a_k(t_0)](i\tilde{\alpha}(t-\tau,y))^k + \sum_{|k|<2} a_k(t)(i\tilde{\alpha}(t-\tau,y))^k\}Q(t,\tau,y), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad y \in R^{n_0}.$$

$Q(t,\tau,y)|_{t=\tau} = I$, тоді

$Q(t,\tau,y) = \exp\{\sum\limits_{|k|=2} a_k(t_0)\int_{t_0}^t (i\tilde{\alpha}(\gamma-\tau,y))^k d\gamma\}\}Q(t_0,\tau,y) + \int_{t_0}^t \exp\{\sum\limits_{|k|=2} a_k(t_0)\int_\beta^t (i\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y))^k d\beta + [\sum\limits_{|k|=2}(a_k(\beta) - a_k(t_0)) + \sum\limits_{|k|<2}(a_k(\beta)](i\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y))^k Q(\beta,\tau,y)d\beta.$

Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і знайдемо таке $\delta(\varepsilon)$, щоб для всіх t, t_0 таких, що $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$, виконувалася нерівність $|a_k(t) - a_k(t_0)| < \varepsilon$. Крім того, $|\sum\limits_{|k|<2} a_k(t)(i\tilde{\alpha}(t-\tau,y))^k\| \le \varepsilon|\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)|^2$ при $|\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)| > R > 0$, тому

$|Q(t,\tau,y)| \le |\exp\{-\sum\limits_{|k|=2} a_k(t_0)\int_{t_0}^t (\tilde{\alpha}^k(\beta-\tau,y)d\beta\}Q(t_0,\tau,y) + \int_{t_0}^t |\exp\{-\sum\limits_{|k|=2} a_k(t_0)\int_\beta^t \tilde{\alpha}^k(\gamma-\tau,y)d\gamma\}|2\varepsilon|\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)|^2|Q(\beta,\tau,y)|d\beta.$

Використавши лему Гронуолла, одержимо нерівність

$|Q(t,\tau,y)| \le c_1|Q(t_0,\tau,y)||\exp\{-\sum\limits_{|k|=2} a_k(t_0)\int_{t_0}^t \tilde{\alpha}^k(\beta-\tau,y)d\beta\}|\times\exp\{2\varepsilon\int_{t_0}^t |\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)|^2 d\beta\}.$

Розкривши інтеграли $\int_{t_0}^t |\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)|^2 d\beta$, використавши параболічність, підібравши ε, після чого записавши показник знову через інтеграл, одержимо

$$|Q(t,\tau,y)| \le c_1|Q(t_0,\tau,y)|\exp\{-\delta_2\int_{t_0}^t |\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)|^2 d\beta\}, \quad 0 < \delta_2 < \delta_0. \quad (38)$$

Ввівши розбиття $t_0 = \tau, \dots\tau + \delta(\varepsilon), \dots\tau + m_1\delta(\varepsilon)$, $m_1 = [\frac{T}{\varepsilon}] + 2$, $c_1 \ge 1$, послідовно оцінюючи $Q(t,\tau,y)$ через (38), одержимо оцінку:

$$|Q(t,\tau,y)| \le c_1^{m_1}\exp\{-\delta_2\int_\tau^t |\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)|^2 d\beta\}. \quad (39)$$

З (39), використавши (36), одержимо (31).

Як і у випадку [1], можна довести оцінку для $Q(t,\tau,y+i\tilde{y})$.

$$|Q(t,\tau,y+i\tilde{y})| \le C\exp\{\int_\tau^t (-\delta_3|\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)|^2 + c_1|\tilde{\alpha}(\beta-\tau,\tilde{y})|^2)d\beta\}, \quad (40)$$

де $0 < \delta_3 < \delta_2$, $c_1 > 0, C > 0$, c_1, C залежать від T, n, δ_0, $sup|A(t)|$, $\{y,\tilde{y}\} \subset \mathbb{R}^{n_0}$.

5 Аналітичний опис ФМРЗК

Щоб дослідити $G(t,x;\tau,\xi)$, зробимо таку заміну змінних в (33):

$\sigma_{1j} + \sigma_{2j}/2 + \sigma_{3j}/6 + \sigma_{4j}/24 = s_{1j}$, $j = \{1,\dots,n_4\}$; $\sigma_{1j} + \sigma_{2j}/2 + \sigma_{3j}/6 = s_{1j}$, $j = \{n_4+1,\dots,n_3\}$; $\sigma_{1j} + \sigma_{2j}/2 = s_{1j}$, $j = \{n_3+1,\dots,n_2\}$; $\sigma^*_{1j} = s_{1j}$, $j = \{n_2+1,\dots,n_1\}$; $\sigma_{2j} + \sigma_{3j}/2 + 3\sigma_{4j}/(20) = s_{2j}$, $j = \{1,\dots,n_4\}$; $\sigma_{2j} + \sigma_{3j}/2) = s_{2j}$, $j = \{n_4+1,\dots,n_3\}$; $\sigma_{2j} = s_{2j}$, $j = \{n_3+1,\dots,n_2\}$; $\sigma_{3j} + \sigma_{4j}/2 = s_{3j}$, $j = \{1,\dots,n_4\}$; $\sigma_{3j} = s_{3j}$, $j = \{n_4+1,\dots,n_3\}$; $\sigma_{4j}/2 = s_{4j}$, $j = \{1,\dots,n_4\}$.

У випадку сталих кофіцієнтів маємо

$$G(t,x;\tau,\xi) = (2\pi)^{-n_0}\int_{R^{n_0}} \exp\{i((x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2}, s_1) + i(x_2 + (\bar{x}_1 + \bar{\xi}_1)\times (t-\tau)/2 - \xi_2)(t-\tau)^{-3/2}, s_2) + i((x_3 + (t-\tau)(\bar{x}_2 + \bar{\xi}_2)/2 + (\bar{\bar{x}}_1 - \bar{\bar{\xi}}_1)\times (t-\tau)^2/12 - \xi_3)(t-\tau)^{-5/2}, s_3) + i((x_4 + (\bar{x}_3 + \bar{\xi}_3)(t-\tau)/2 + (\bar{\bar{x}}_2 - \bar{\bar{\xi}}_2)\times (t-\tau)^2/10 + (x'_1 + \xi'_1)(t-\tau)^3/120 - \xi_4)(t-\tau)^{-7/2}, s_4) + \sum_{|k|\le 2} a_k i^k(s_1^k + s_2^k 12^{\frac{k}{2}} + s_3^k 720^{\frac{k}{2}} + s_4^k 252000^{\frac{k}{2}})\}ds(t-\tau)^{-\frac{p}{2}}. \quad (41)$$

Аналізуючи (41), аналогічно як у випадку рівняння типу Колмогорова з сталими коефіцієнтами, інерція якого залежить від 4-ох груп змінних [2], одержимо аналітичний опис ФМРЗК. У загальному випадку, використовуючи (39), (40), (31), (35), (36), одержимо твердження:

Теорема 1. *ФМРЗК системи (5) має вигляд*

$G(t,x;\tau,\xi) = (t-\tau)^{-\frac{p}{2}}\Omega(t,\tau;((x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2}, (x_2 - \xi_2 + (\bar{x}_1 + \bar{\xi}_1)(t-\tau)/2)(t-\tau)^{-3/2}, (x_3 - \xi_3 + (t-\tau)(\bar{x}_2 + \bar{\xi}_2)/2 + (\bar{\bar{x}}_1 - \bar{\bar{\xi}}_1)(t-\tau)^2/12)(t-\tau)^{-5/2}, (x_4 - \xi_4 + (\bar{x}_3 + \bar{\xi}_3)(t-\tau)/2 + (\bar{\bar{x}}_2 - \bar{\bar{\xi}}_2)(t-\tau)^2/10 + (x'_1 + \xi'_1)(t-\tau)^3/120 - \xi_4)(t-\tau)^{-7/2})$, *де* $\Omega(t,\tau,z_1,z_2,z_3,z_4)$ *при фіксованих* t,τ *є цілою функцією аргументів* $z_1,\dots z_4$ *порядку зростання 2 при комплексних значеннях цих аргументів і такого ж самого порядку спадання при їх дійсних значеннях.*

Для похідних справджуються оцінки;

$$|\partial_x^m \partial_\xi^l G(t, x+iy; \tau, \xi)| \le C_{ml}(t-\tau)^{-M_{ml}} \exp\{-c_0\rho(t,x;\tau,\xi) + F_1 d(t,y;\tau,0)\};$$

$$|(\partial_t - \sum_{j=1}^{3} \bar{x}_j \partial_{x_j+1}) G(t, x+iy; \tau, \xi)| \le C(t-\tau)^{-1-p/2} \exp\{-c_0\rho(t,x;\tau,\xi) + F_1 d(t,y;\tau,0)\};$$

$$M_{ml} = \sum_{j=1}^{4} (2j-1)(n_j + |m_j| + |l_j|)/2;$$

$$|\partial_t G(t, x+iy; \tau, \xi)| \le C_1(t-\tau)^{-p/2} \exp\{-c_0\rho(t,x;\tau,\xi) + F_1 d(t,y;\tau,0)\}((t-\tau)^{-1} + \sum_{j=1}^{3}(|x_j| +$$

$|\xi_j|)(t-\tau)^{-(2j+1)/2})$, $\{x, \xi, y\} \subset \mathbb{R}^{n_0}$, $0 \le \tau < t \le T$, де F_1, C_{lm}, C, C_1, c_0 – додатні сталі, залежать від $\sup|A(t)|$, характеру неперервності $a_k(t)$, T, n_j, δ_0.

Аналогічно, як для параболічних систем [4, с. 91-92], можна показати, що існує ФМРЗК спряженої системи до (5), та встановити оцінки її похідних, довести нормальність $G(t,x;\tau,\xi)$, формулу згортки і єдиність ФМРЗК.

Література

1. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.:Мир,1964. – 830 с.
2. Малицька Г.П. *Системи рівнянь типу Колмогорова* // Укр. мат. журн. – 2009. – Т.12, №3. – С. 1650-1563.
3. Малицька Г.П. *Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії із змінною інерцією* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т.42, №3. – С. 56-60.
4. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
5. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type Operator Theory, Adv.and Appl.,**152** (2004), 390p.

Прикарпатський університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 24.11.2009

Malytska H.P. *The systems of the equations by Kolmogorow's type of second oder*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 180–190.

We consider one class of systems of ultraparabolic equation of second order, that have four groups of variables after which are degeneration and coefficients are depend only on a time variable, we construct the fundamental matrix of Cauchy problem and obtain the estimations of this matrix and all its derivatives.

Малицкая А.П. *Системы уравнений типа Колмогорова второго порядка // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 180–190.

Рассмотрен один класс ультрапараболических систем уравнений второго порядка, имеющих четыре группы переменных по которых есть вырождение и коэффициенты зависят только от часовой переменной, построена фундаментальная матрица решений задачи Коши, получены оценки этой матрицы и всех ее производных.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 519.217.4

ОСИПЧУК М.М.

ПРО ГРАНИЧНИЙ РОЗПОДІЛ КІЛЬКОСТІ ПЕРЕТИНІВ ПОСЛІДОВНОСТІ РІВНІВ ДЕЯКОЮ ПОСЛІДОВНІСТЮ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Осипчук М.М. *Про граничний розподіл кількості перетинів послідовності рівнів деякою послідовністю дифузійних процесів // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 191–196.

У роботі розглядається граничний розподіл кількості перетинів деякого рівня послідовністю випадкових величин $\xi_n(0)$, $\xi_n\left(\frac{1}{m}\right)$,..., $\xi_n\left(\frac{N}{m}\right)$ при прямуванні до нескінченності натуральних n, m, N деяким узгодженим способом. Тут $(\xi_n(t))_{t\ge0}$, $n=1,2,\ldots,$ – дифузійний процес на дійсній прямій $\mathbb{R}$ з локальними характеристиками (переносом і коефіцієнтом дифузії) $(a_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ і $(b_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$, що задаються рівностями $a_n(x) = na(nx)$, $b_n(x) = b(nx)$ для $x \in \mathbb{R}$ і $n = 1,2,\ldots$ при деяких фіксованих функціях $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ і $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$.

Нехай на дійсній осі $\mathbb{R}$ задані обмежені неперервні функції $a(\cdot)$ і $b(\cdot)$ з дійсними значеннями. Будемо вважати, що $\inf_{x\in\mathbb{R}} b(x) > 0$. Тоді існує дифузійний процес $(\xi(t))_{t\ge0}$ в $\mathbb{R}$, траєкторії якого є розв'язками стохастичного диференціального рівняння

$$d\xi(t) = a(\xi(t))dt + \sqrt{b(\xi(t))}dw(t). \tag{1}$$

Нехай, крім того, функції $a(\cdot)$ і $b(\cdot)$ задовольняють умову Гельдера. Тоді щільність $g(t,x,y)$ $(t>0,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R})$ відносно Лебегової міри в $\mathbb{R}$ ймовірності переходу процесу $\xi(t)$ є фундаментальним розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2}$$

Розглянемо функції

$$A(x) = \int_0^x \frac{a(z)}{b(z)}dz, \quad F(x) = \int_0^x e^{-2A(z)}dz, \quad H(x) = \int_0^x e^{2A(z)}\frac{dz}{b(z)} \quad (x\in\mathbb{R}). \tag{3}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 60J60, 60H10.
Ключові слова і фрази: дифузійний процес, стохастичне диференціальне рівняння.

© Осипчук М.М., 2009

Припустимо, що функція $A(\cdot)$ обмежена.

Для кожного $n \geq 1$ покладемо $a_n(x) = na(nx)$, $b_n(x) = b(nx)$. Очевидно, що ці функції задовольняють всі згадані вище умови, і тому існує послідовність дифузійних процесів $\{(\xi_n(t))_{t\geq 0} : n \geq 1\}$, траєкторії яких є розв'язками рівнянь (1) з функціями $a_n(\cdot)$ і $b_n(\cdot)$.

В роботі [3] доведено (див. також [1], [2], [4]), що при умові існування границь

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{1}{x}F(x) = \varkappa_F, \quad \lim_{|x|\to+\infty} \frac{1}{x}H(x) = \varkappa_H \tag{4}$$

послідовність дифузійних процесів $(\xi_n(t))_{t\geq 0}$ при $n \to +\infty$ слабко збігається до процесу $\frac{1}{\sqrt{\varkappa_F\varkappa_H}}w(t)_{t\geq 0}$, де $w(t)_{t\geq 0}$ — стандартний вінерів процес.

Для кожного набору натуральних чисел n, m, k та дійсного числа α визначимо випадкові величини $\zeta_k^{(n,m)}(\alpha)$, поклавши

$$\zeta_k^{(n,m)}(\alpha) = \begin{cases} 1, & (\xi_n\left(\frac{k-1}{m}\right) - \frac{\alpha}{n})(\xi_n\left(\frac{k}{m}\right) - \frac{\alpha}{n}) < 0; \\ 0, & (\xi_n\left(\frac{k-1}{m}\right) - \frac{\alpha}{n})(\xi_n\left(\frac{k}{m}\right) - \frac{\alpha}{n}) \geq 0. \end{cases}$$

Випадкова величина $\nu_N^{(n,m)}(\alpha) = \sum_{k=1}^{N} \zeta_k^{(n,m)}(\alpha)$ при всіх натуральних N задає кількість перетинів рівнів $\frac{\alpha}{n}$ послідовністю випадкових величин $\xi_n(0)$, $\xi_n\left(\frac{1}{m}\right)$,..., $\xi_n\left(\frac{N}{m}\right)$.

В роботі [3] встановлено, що за умови виконання згаданих щодо функцій $a(\cdot)$ і $b(\cdot)$ умов та існування і обмеженості їх похідних, при $n \to +\infty$, $m \to +\infty$ так, що $\frac{n^2}{m} \to \tau$, $0 < \tau < +\infty$, має місце співвідношення

$$\lim \mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(0) < y\right) = \mathbb{I}_{(0;+\infty)}(y)2\Phi\left(\frac{y}{\gamma\sqrt{t}} + \frac{|x|}{\sqrt{t}}\sqrt{\varkappa_F\varkappa_H}\right) \quad (t > 0,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}),$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy \text{ — функція Лапласа,}$$

$$\gamma = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}\left(\int_{-\infty}^{0} H'(y)dy\int_0^{\infty} g(\tau,y,z)dz + \int_0^{\infty} H'(y)dy\int_{-\infty}^{0} g(\tau,y,z)dz\right).$$

Нашим завданням є одержати граничний розподіл для $\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha)$ при довільному $\alpha \in \mathbb{R}$. Виявляється, що відповідний результат є нескладним наслідком попереднього.

1 Зсув вздовж координатної осі

Нам будуть потрібні кілька допоміжних тверджень. Розглянемо розв'язок $\xi(t)$ рівняння (1) з початковою умовою $\xi(0) = x$, $x \in \mathbb{R}$ та випадковий процес $\eta(t) = \xi(t) - \alpha$, $t \geq 0$.

Лема 1. *Для процесу $\eta(t)$ має місце наступне:*

1.A $d\eta(t) = \hat{a}(\eta(t))dt + \sqrt{\hat{b}(\eta(t))}dw(t)$, $\eta(0) = x - \alpha$, *де* $\hat{a}(x) = a(x+\alpha)$, $\hat{b}(x) = b(x+\alpha)$;

1.B *$\eta(t)$ є дифузійним процесом із щільністю ймовірності переходу*

$$\hat{g}(t,x,y) = g(t,x+\alpha,y+\alpha).$$

Доведення. Твердження A випливає з рівності

$$d\eta(t) = d\xi(t) = a(\xi(t))dt + \sqrt{b(\xi(t))}dw(t) = a(\eta(t)+\alpha)dt + \sqrt{b(\eta(t)+\alpha)}dw(t) = $$
$$= \hat{a}(\eta(t))dt + \sqrt{\hat{b}(\eta(t))}dw(t).$$

А оскільки для довільної борельової множини $\Gamma \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}_x(\eta(t)\in\Gamma) = \mathbb{P}_{x+\alpha}(\xi(t)\in\Gamma+\alpha) = \int_{\Gamma+\alpha} g(t,x+\alpha,y)dy = $$
$$\int_{\Gamma} g(t,x+\alpha,y+\alpha)dy,$$

то правильним є і твердження B. □

Нехай $\hat{A}(x)$, $\hat{F}(x)$, $\hat{H}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ — функції, що побудовані з допомогою формул (3) за функціями $\hat{a}(\cdot)$ і $\hat{b}(\cdot)$. Рівність

$$\hat{A}(x) = \int_0^x \frac{\hat{a}(z)}{\hat{b}(z)}\,dz = \int_0^x \frac{a(z+\alpha)}{b(z+\alpha)}\,dz = \int_\alpha^{x+\alpha} \frac{a(z)}{b(z)}\,dz = A(x+\alpha) - A(\alpha)$$

дає змогу стверджувати, що функції $\hat{A}(\cdot)$ і $A(\cdot)$ обмежені одночасно. Легко одержати і наступні рівності:

$$\hat{F}(x) = (F(x+\alpha) - F(\alpha))e^{2A(\alpha)}, \quad \hat{H}(x) = (H(x+\alpha) - H(\alpha))e^{-2A(\alpha)} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

Обчислимо границі

$$\hat{\varkappa}_F = \lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}\hat{F}(x) = e^{2A(\alpha)}\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}(F(x+\alpha) - F(\alpha)) = \varkappa_F e^{2A(\alpha)}, \tag{6}$$

$$\hat{\varkappa}_H = \lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}\hat{H}(x) = e^{-2A(\alpha)}\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}(H(x+\alpha) - H(\alpha)) = \varkappa_H e^{-2A(\alpha)}. \tag{7}$$

Звідси, між іншим, випливає, що

$$\hat{\varkappa}_F\hat{\varkappa}_H = \varkappa_F\varkappa_H. \tag{8}$$

Побудувавши послідовність $\{(\eta_n(t))_{t\geq 0} : n \geq 1\}$ дифузійних процесів з коефіцієнтами $\hat{a}_n(x) = n\hat{a}(nx)$ та $\hat{b}_n(x) = \hat{b}(nx)$ і початковими значеннями $\eta_n(0) = x - \alpha$, можемо стверджувати про правильність наступного.

Лема 2. 2.A *Граничні розподіли (в розумінні слабкої збіжності) послідовностей* $\{(\eta_n(t))_{t\geq 0} : n \geq 1\}$ *та* $\{(\xi_n(t))_{t\geq 0} : n \geq 1\}$ *однакові.*

2.B $\nu_N^{(n,m)}(\alpha) = \hat{\nu}_N^{(n,m)}(0)$, *де* $\hat{\nu}_N^{(n,m)}(0)$ — *кількість перетинів послідовністю випадкових величин* $\eta_n(0)$, $\eta_n\left(\frac{1}{m}\right)$,..., $\eta_n\left(\frac{N}{m}\right)$ *нульового рівня.*

Перейдемо тепер до основного твердження.

Теорема. *Нехай функції* $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ *і* $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ — *неперервні, обмежені та гельдерові, функція* [1] $(A(x))_{x\in\mathbb{R}}$ *обмежена та існують границі* $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}F(x) = \varkappa_F$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}H(x) = \varkappa_H$. *Тоді якщо* $n \to +\infty$, $m \to +\infty$ *в такий спосіб, що* $\frac{n^2}{m} \to \tau$, $0 < \tau < +\infty$, *то*

$$\lim \mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha) < y\right) = \mathbb{I}_{(0;+\infty)}(y)2\Phi\left(\frac{y}{\gamma(\alpha)\sqrt{t}} + \frac{|x-\alpha|}{\sqrt{t}}\sqrt{\varkappa_F\varkappa_H}\right),$$

де

$$\gamma(\alpha) = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}\left(\int_{-\infty}^{\alpha} H'(y)dy\int_{\alpha}^{\infty} g(\tau,y,z)dz + \int_{\alpha}^{\infty} H'(y)dy\int_{-\infty}^{\alpha} g(\tau,y,z)dz\right).$$

Доведення. Твердження леми 2 та рівності (8) і

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha) < y\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha) < y/\xi(0) = x\right) = \\ &\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\hat{\nu}_{[mt]}^{(n,m)}(0) < y/\eta(0) = x-\alpha\right) = \mathbb{P}_{x-\alpha}\left(\frac{1}{n}\hat{\nu}_{[mt]}^{(n,m)}(0) < y\right)\end{aligned}$$

дають змогу стверджувати, що для доведення теореми досить обчислити

$$\gamma(\alpha) = \hat{\gamma} = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\hat{\varkappa}_F}{\hat{\varkappa}_H}}\left(\int_{-\infty}^{0}\hat{H}'(y)dy\int_{0}^{\infty}\hat{g}(\tau,y,z)dz + \int_{0}^{\infty}\hat{H}'(y)dy\int_{-\infty}^{0}\hat{g}(\tau,y,z)dz\right).$$

З леми 1 та рівностей (5) — (7) випливає, що

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha) = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F e^{2A(\alpha)}}{\varkappa_H e^{-2A(\alpha)}}}\Bigg(&e^{-2A(\alpha)}\int_{-\infty}^{0}H'(y+\alpha)dy\int_{0}^{\infty}g(\tau,y+\alpha,z+\alpha)dz + \\ &e^{-2A(\alpha)}\int_{0}^{\infty}H'(y+\alpha)dy\int_{-\infty}^{0}g(\tau,y+\alpha,z+\alpha)dz\Bigg) = \\ \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}\left(\int_{-\infty}^{\alpha} H'(y)dy\int_{\alpha}^{\infty} g(\tau,y,z)dz + \int_{\alpha}^{\infty} H'(y)dy\int_{-\infty}^{\alpha} g(\tau,y,z)dz\right).\end{aligned}$$

Отже, теорема доведена. □

[1] Функції $A(x)$, $F(x)$, $H(x)$ задаються рівностями (3)

2 Випадок періодичних дифузійних коефіцієнтів

Розглянемо випадок, коли функції $a(\cdot)$ і $b(\cdot)$ періодичні з найменшим додатним періодом l та задовольняють умови теореми попереднього пункту. Легко бачити, що для розв'язку $(\xi_x(t))_{t\geq 0}$ рівняння

$$\xi_x(t) = x + \int_0^t a(\xi_x(s))ds + \int_0^t \sqrt{b(\xi_x(s)}dw(s)$$

процес $\xi_{x+l}(t) - l$ також задовольняє це ж рівняння, тобто $\xi_{x+l}(t) - l = \xi_x(t)$ через єдиність його розв'язку. Тому $g(t, x+l, y+l) = g(t,x,y)$ при всіх $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Враховуючи очевидну рівність $\int_x^{x+l} f(z)dz = \int_0^l f(z)dz$ для l-періодичної функції f, одержимо

$$H'(x+l) = \frac{1}{b(x+l)}\exp\left\{2\int_0^{x+l}\frac{a(z)}{b(z)}dz\right\} = H'(x)e^{2A(l)}.$$

Очевидно, що $A(kl) = \int_0^{kl}\frac{a(z)}{b(z)}\,dz = \sum_{m=0}^{k-1}\int_{ml}^{(m+1)l}\frac{a(z)}{b(z)}\,dz = \sum_{m=0}^{k-1}\int_0^l\frac{a(z)}{b(z)}\,dz = kA(l)$, тому, при умові обмеженості функції $A(\cdot)$, необхідно, щоб $A(l) = 0$. Отже, $H'(x+l) = H'(x)$ при всіх $x \in \mathbb{R}$. Таким чином,

$$\begin{aligned}&\gamma(\alpha+l) = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}\left(\int_{-\infty}^{\alpha+l}H'(y)dy\int_{\alpha+l}^{\infty}g(\tau,y,z)dz + \int_{\alpha+l}^{\infty}H'(y)dy\int_{-\infty}^{\alpha+l}g(\tau,y,z)dz\right) = \\ &\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}\left(\int_{-\infty}^{\alpha}H'(y+l)dy\int_{\alpha}^{\infty}g(\tau,y+l,z+l)dz + \int_{\alpha}^{\infty}H'(y+l)dy\int_{-\infty}^{\alpha}g(\tau,y+l,z+l)dz\right) = \\ &\qquad\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}\left(\int_{-\infty}^{\alpha}H'(y)dy\int_{\alpha}^{\infty}g(\tau,y,z)dz + \int_{\alpha}^{\infty}H'(y)dy\int_{-\infty}^{\alpha}g(\tau,y,z)dz\right) = \gamma(\alpha).\end{aligned}$$

Отже, для кожного цілого k

$$\lim \mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha+kl) < y\right) = \mathbb{I}_{(0;+\infty)}(y)2\Phi\left(\frac{y}{\gamma(\alpha)\sqrt{t}} + \frac{|x-\alpha-kl|}{\sqrt{t}}\sqrt{\varkappa_F\varkappa_H}\right). \tag{9}$$

Звідси

$$\begin{aligned}\lim \mathbb{P}_{x+kl}\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha+kl) < y\right) &= \mathbb{I}_{(0;+\infty)}(y)2\Phi\left(\frac{y}{\gamma(\alpha)\sqrt{t}} + \frac{|x-\alpha|}{\sqrt{t}}\sqrt{\varkappa_F\varkappa_H}\right) = \\ &\lim \mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha) < y\right).\end{aligned}$$

Подавши рівень перетину у вигляді $\alpha = kl + \beta$, де $k = \left[\frac{\alpha}{l}\right]$, $\beta = \left\{\frac{\alpha}{l}\right\}l$, одержимо

$$\lim \mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha) < y\right) = \mathbb{I}_{(0;+\infty)}(y)2\Phi\left(\frac{y}{\gamma(\beta)\sqrt{t}} + \frac{|x-\alpha|}{\sqrt{t}}\sqrt{\varkappa_F\varkappa_H}\right).$$

Література

1. Кулинич Г.Л. *Асимптотическая нормальность распределения решения стохастического диффузионного уравнения* // Украинский матем. журн. – 1968. – Т.20, №3. – С. 396-400.
2. Кулинич Г.Л. *Предельное распределение решения стохастического диффузионного уравнения* // Теория вероятн. и ее примен. – 1968. – XIII, 3. – С. 502-506.
3. Хайсам Аль Фарах, Микола Портенко. Гранична теорема для кількості перетинів фіксованого рівня слабко збіжною послідовністю дифузійних процесів / — Київ, 2007. — 24 с. — (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 2007.6)
4. Kulik A.M. *A limit theorem for the number of sign changes for a sequence of one-dimensional diffusions*, Theory of Stochastic Processes, **14**, 30 (2008), 2. 79-92.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 19.11.2009

Osypchuk M.M. *On the number of crossings of some levels by a sequence of diffusion processes*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 191–196.

The limit behavior of the number of crossings of some sequence of levels by the following sequence of random variables $\xi_n(0)$, $\xi_n\left(\frac{1}{m}\right)$,..., $\xi_n\left(\frac{N}{m}\right)$, as the integers n, m, N are increasing to infinity in some consistent way, is investigated, where $(\xi_n(t))_{t\geq 0}$ for $n=1,2,\ldots$ is a diffusion process on a real line $\mathbb{R}$ with its local characteristics (that is, drift and diffusion coefficients) $(a_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ and $(b_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ given by $a_n(x)=na(nx)$, $b_n(x)=b(nx)$ for $x\in\mathbb{R}$ and $n=1,2,\ldots$ with some fixed functions $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ and $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$.

Осипчук М.М. *О предельном распределении количества пересечений последовательности уровней некоторой последовательностью диффузионных процессов* // *Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 191–196.

В работе рассматривается предельное распределение количества пересечений некоторого уровня последовательностью случайных величин $\xi_n(0)$, $\xi_n\left(\frac{1}{m}\right)$,..., $\xi_n\left(\frac{N}{m}\right)$ при стремлении к бесконечности натуральных n, m, N некоторым согласованным способом. Здесь $(\xi_n(t))_{t\geq 0}$, $n=1,2,\ldots,$ — диффузионный процесс на действительной прямой $\mathbb{R}$ с локальными характеристиками (переносом и коэффициентом диффузии) $(a_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ и $(b_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ задающимися равенствами $a_n(x)=na(nx)$, $b_n(x)=b(nx)$ для $x\in\mathbb{R}$ и $n=1,2,\ldots$ при некоторых фиксированных функциях $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ и $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 517.98

Соломко А.В.

Операторне зображення алгебри ультрарозподілів класу Жевре з носіями в додатному N-вимірному куті

Соломко А.В *Операторне зображення алгебри ультрарозподілів класу Жевре з носіями в додатному n-вимірному куті* // *Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 197–206.

Для побудованої двоїстості ультрарозподілів Жевре та ультрадиференційовних функцій доведена теорема про зображення згорткової алгебри ультрарозподілів класу Жевре у вигляді комутанта сильно неперервної напівгрупи зсувів в алгебрі лінійних неперервних відображень над простором ультрадиференційовних функцій з носіями в додатному n-вимірному куті.

Основним елементом побудови операторного числення для згорткової алгебри ультрарозподілів класу Жевре з носіями в додатному n-вимірному куті, яке розглядається в роботі [1], є розв'язання проблеми зображення згорткової алгебри в просторі лінійних неперервних операторів на мультиплікативній алгебрі ультрадиференційовних функцій. В статті досліджується згорткова алгебра ультрарозподілів Жевре $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ над простором ультрадиференційовних функцій $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ з носіями в додатному n-вимірному куті та доводиться важлива теорема про топологічний ізоморфізм визначеної згорткової алгебри комутанту напівгрупи зсувів. Отримане зображення базується на n-вимірному узагальненні операції крос-кореляції та крос-кореляційного аналогу теореми Шварца, представлених в статті [4], та є їх подальшим нетривіальним узагальненням.

Розглядаємо n-вимірний додатний конус $\mathbb{R}^n_+=[0,+\infty)\times\cdots\times[0,+\infty)$. Далі позначаємо $\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+=(0,+\infty)\times\cdots\times(0,+\infty)$. На сукупності векторів $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ задаємо відношення порядків

$$\{\nu\prec\mu:\nu_1<\mu_1,\ldots,\nu_n<\mu_n\},\qquad\{\nu\preceq\mu:\nu_1\leq\mu_1,\ldots,\nu_n\leq\mu_n\}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 42A38, 46H30.
Ключові слова і фрази: ультрадиференційовна функція, ультрарозподіл Жевре, (C_0)-напівгрупа операторів, згорткова алгебра.

© Соломко А.В., 2009

Зафіксуємо число $\aleph > 1$. Для довільно вибраних векторів $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ і $1 \preceq \nu$ визначимо простір нескінченно диференційовних функцій з носіями в n-вимірному паралелепіпеді $[a, b] := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ вигляду

$$G_\nu[a,b] = \Big\{\varphi :\ \operatorname{supp}\varphi \subset [a,b], \quad \|\varphi\|_{G_\nu[a,b]} < \infty\Big\},$$

з набором норм

$$\|\varphi\|_{G_\nu[a,b]} := \sup_{k\in\mathbb{Z}_+^n}\sup_{t\in[a,b]}\frac{|\partial^k\varphi(t)|}{\nu^k k^{k\aleph}}. \tag{1}$$

Вище $k=(k_1,\ldots,k_n)$, $|k| = k_1+\cdots+k_n$, $k^{k\aleph}=k_1^{k_1\aleph}\cdot\ldots\cdot k_n^{k_n\aleph}$, $\nu^k=\nu_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\nu_n^{k_n}$, $\partial^k = \partial_1^{k_1}\ldots\partial_n^{k_n}$, де $\partial_j^{k_j} = \dfrac{(-i)^{k_j}\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}$ для всіх $\ = 1,\ldots,n$ і supp позначає носій функції. Як легко побачити, для набору векторів $1 \preceq \nu \prec \mu$ і довільного паралелепіпеда $[a, b]$ виконується нерівність

$$\|\varphi\|_{G_\mu[a,b]} \le \|\varphi\|_{G_\nu[a,b]}, \qquad \varphi \in G_\nu[a,b].$$

Оскільки при $1 \preceq \nu \prec \mu$ вкладення $G_\nu[a,b] \subset G_\mu[a,b]$ є неперервними, то можна визначити індуктивну границю

$$G[a,b] := \bigcup_{\nu\succeq 1} G_\nu[a,b] = \liminf_{\nu\succeq 1}\operatorname{ind} G_\nu[a,b] \tag{2}$$

відносно будь-якої послідовності векторів ν, напрямлених відношенням порядку $\prec$. Очевидно, що співвідношення (2) не залежить від вибору цієї послідовності.

З іншої сторони, для монотонно зростаючих паралелепіпедів $[a,b] \subset [a',b']$ і фіксованого $\nu \succeq 1$ маємо $\|\varphi\|_{G_\nu[a,b]} = \|\varphi\|_{G_\nu[a',b']}$, $\varphi \in G_\nu[a,b]$, і вкладення $G_\nu[a,b] \subset G_\nu[a',b']$ при $a' \prec a$ та $b \prec b'$ є неперервними. Тоді природнім чином визначається індуктивна локально опукла границя

$$G_\nu(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{a\prec b} G_\nu[a,b] = \lim_{a\prec b}\operatorname{ind} G_\nu[a,b] \tag{3}$$

відносно будь-якої послідовності паралелепіпедів $[a,b]$, напрямлених відношенням вкладення. Очевидно також, що співвідношення (3) не залежить від вибору такої послідовності паралелепіпедів.

Твердження 1. *Для довільних функцій $\varphi \in G_\nu[a,b]$ і $\psi \in G_\mu[a',b']$ таких, що $[a,b] \subset [a',b']$, справедлива нерівність*

$$\|\varphi\cdot\psi\|_{G_{\nu+\mu}[a,b]} \le \|\varphi\|_{G_\nu[a,b]}\cdot\|\psi\|_{G_\mu[a',b']}. \tag{4}$$

Доведення. Дійсно, для довільного $t \in \operatorname{supp}(\varphi\cdot\psi) \subset [a,b]$ ми можемо записати

$$\big|\partial^k[\varphi(t)\cdot\psi(t)]\big| \le \|\varphi\|_{G_\nu[a,b]}\cdot\|\psi\|_{G_\mu[a',b']}\sum_{|m|=0}^{|k|}\frac{\nu^m\mu^{k-m}\ \ {}^{m\aleph}(k-\ \ )^{(k-m)\aleph}k!}{!(k-\ \ )!} \le$$

$$\|\varphi\|_{G_\nu[a,b]}\cdot\|\psi\|_{G_\mu[a',b']}\sum_{|m|=0}^{|k|}\frac{\nu^m\mu^{k-m}k^{m\aleph}k^{(k-m)\aleph}k!}{!(k-\ \ )!} \le$$

$$\|\varphi\|_{G_\nu[a,b]}\cdot\|\psi\|_{G_\mu[a',b']}\sum_{|m|=0}^{|k|}\frac{\nu^m\mu^{k-m}k!}{!(k-\ \ )!}k^{k\aleph} \le \|\varphi\|_{G_\nu[a,b]}\cdot\|\psi\|_{G_\mu[a',b']}(\nu+\mu)^k k^{k\aleph},$$

тобто

$$\frac{|\partial^k[\varphi(t)\psi(t)]|}{(\nu+\mu)^k k^{k\aleph}} \le \|\varphi\|_{G_\nu[a,b]}\cdot\|\psi\|_{G_\mu[a',b']}.$$

Тепер нерівність (4) прямо випливає з означення норми (1). □

Розглянемо локально опуклу індуктивну границю вигляду

$$G(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{\nu\succeq 1}\bigcup_{b\succ a} G_\nu[a,b] = \lim_{b\succ a,\,|\nu|\to\infty}\operatorname{ind} G_\nu[a,b] \tag{5}$$

відносно неперервних вкладень $G_\nu[a,b] \subset G_{\nu'}[a',b']$ таких, що $1 \preceq \nu \prec \nu'$ і $[a,b] \subset [a',b']$. Неважко перевірити, що простір $G(\mathbb{R}^n)$ є алгеброю відносно операції поточкового множення функцій. Функції з $G(\mathbb{R}^n)$ називаються ультрадиференційовними в сенсі М. Жевре (див. [7]).

Візьмемо тепер простір $G(\mathbb{R})$ ультрадиференційовних функцій класу Жевре від однієї змінної, і визначимо оператор множення довільної функції $\varphi(t) \in G(\mathbb{R})$ на функцію Гевісайда:

$$\Theta : G(\mathbb{R}) \ni \varphi(t) \to \varphi(\tau) = \theta(t)\varphi(t), \tag{6}$$

де $\theta(t) = \begin{cases} 1 & : \ t \ge 0, \\ 0 & : \ t < 0. \end{cases}$ Відображення (6) здійснює гомоморфізм алгебр, при цьому його ядро $\operatorname{Ker}\Theta = \Big\{\varphi \in G(\mathbb{R}) :\ \operatorname{supp}\varphi\bigcap[0,+\infty) = \varnothing\Big\}$ є ідеалом алгебри $G(\mathbb{R})$. Отже, фактор-простір $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+) := G(\mathbb{R})/\operatorname{Ker}\Theta$ є також алгеброю. Будемо називати функції з цього простору ультрадиференційовними функціями класу Жевре на додатній півосі.

Означення 1. *Простір $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n) := \mathcal{G}(\mathbb{R}_+)\widetilde{\otimes}\ldots\widetilde{\otimes}\,\mathcal{G}(\mathbb{R}_+)$, де через $\widetilde{\otimes}$ позначено поповнення тензорного добутку в проективній топології, називаємо простором ультрадиференційовних функцій класу Жевре з носіями в додатному n-вимірному куті $\mathbb{R}_+^n$.*

Якщо позначити $\mathcal{G}_\nu[0,b] := G_\nu[a,b]\,/\operatorname{Ker}\Theta\bigcap G_\nu[0,b]$, то з неперервності вкладень $\mathcal{G}_\nu[0,b] \subset \mathcal{G}_\mu[0,b']$ при $1 \preceq \nu \prec \mu$ і $[0,b] \subset [0,b']$ та елементарних властивостей індуктивних границь негайно випливає справедливість таких топологічних ізоморфізмів:

$$\mathcal{G}[0,b] \simeq \lim_{|\nu|\to\infty}\operatorname{ind}\mathcal{G}_\nu[0,b], \quad \mathcal{G}_\nu(\mathbb{R}_+^n) \simeq \lim_{|b|\to\infty}\operatorname{ind}\mathcal{G}_\nu[0,b], \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n) \simeq \lim_{|\nu|,|b|\to\infty}\operatorname{ind}\mathcal{G}_\nu[0,b].$$

Вище $|\nu|, |b|$ означають евклідові норми векторів.

Твердження 2. *Для довільних векторів $\nu \succeq 1$ та $b \in \mathbb{R}^n$, що задовольняють умову $b \succ 2\nu$, існує функція вигляду $\ (\tau) = \ {}_1(\tau_1)\cdot\ldots\cdot\ {}_n(\tau_n)$ така, що для всіх $j = 1,\ldots,n$ виконуються співвідношення*

$$0 \le \ {}_j \le 1, \qquad {}_j \in \mathcal{G}_{2\nu_j\zeta(\aleph)}[0, b_j+\nu_j], \qquad {}_j|_{[0,b_j]} \equiv 1,$$

де $\zeta(\aleph) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\aleph}$ *– функція Рімана.*

Доведення. В силу теореми Карлемана-Данжуа [5, теор. 1.3.5] для числа $\aleph > 1$ існує функція $\psi \geq 0$ така, що

$$|\partial^k \psi(t)| \leq 2[2\zeta(\aleph)]^k k^{k\aleph}, \quad |\operatorname{supp}\psi| \leq 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 1, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Для довільного числа $\gamma > 0$ через $\chi_\gamma(t)$ позначимо характеристичну функцію інтервалу $[-\gamma, \gamma]$ і утворимо згортку вигляду

$$\psi_\gamma(s) := (\chi_\gamma * \psi)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_\gamma(t)\psi(s-t)dt = \int_{s-\gamma}^{s+\gamma} \psi(t)dt.$$

З того, що $\operatorname{supp}\psi_\gamma \subset \operatorname{supp}\psi + \operatorname{supp}\chi_\gamma \subset [-\gamma-1, \gamma+1]$ і $\partial^k\psi_\gamma = \chi_\gamma * \partial^k\psi$, отримаємо

$$|\partial^k \psi_\gamma(s)| \leq \int_{-\gamma-1}^{\gamma+1} |\chi_\gamma(s-t)\partial^k\psi(t)|dt \leq 4(\gamma+1)[2\zeta(\aleph)]^k k^{k\aleph}. \tag{7}$$

Для довільного $\gamma \geq 2$ маємо, що

$$\psi_\gamma(s) = \begin{cases} 0, & |s| \geq \gamma+1, \\ 1, & |s| < \gamma, \end{cases} \tag{8}$$

звідки $\psi_\gamma(s) \in G_{2\zeta(\aleph)}[-\gamma-1, \gamma+1]$.

У рівностях (7) та (8) зробимо заміну s на $t = s\mu$, де $\mu > 0$. Тоді для функції $\widetilde{\psi}_\gamma(t) := \psi_\gamma(s\mu)$ отримаємо

$$|\partial^k \widetilde{\psi}_\gamma(t)| \leq 4(\gamma+1)[2\mu\zeta(\aleph)]^k k^{k\aleph}, \qquad \widetilde{\psi}_\gamma(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq \mu\gamma+\mu, \\ 1, & |t| < \mu\gamma. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $\widetilde{\psi}_\gamma(t) \in G_{2\mu\zeta(\aleph)}[-\mu\gamma-\mu, \mu\gamma+\mu]$ і $\widetilde{\psi}_\gamma|_{[-\mu\gamma,\mu\gamma]} \equiv 1$. Тоді для $\gamma = \dfrac{b_j}{\nu_j}$, згідно умов $\dfrac{b_j}{\nu_j} \geq 2$ та $\mu = \nu_j$, маємо

$$\widetilde{\psi}_\gamma(t) \in G_{2\nu_j\zeta(\aleph)}[-b_j-\nu_j, b_j+\nu_j], \quad \widetilde{\psi}_\gamma|_{[-b_j,b_j]} \equiv 1. \tag{9}$$

Оскільки в загальному випадку $\mathcal{G}_{\nu_j}[0,b_j] := G_{\nu_j}[a_j,b_j]/\operatorname{Ker}\Theta|_{G_{\nu_j}[a_j,b_j]}$, то потрібні функції ϱ_j ми одержимо, помноживши функцію із співвідношень (9) на характеристичну функцію θ_j, тобто $\varrho_j = \theta_j\widetilde{\psi}_\gamma$, $j = 1,\dots,n$. □

Твердження 3. *Простір $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ – ядерний, рефлексивний та бочковий.*

Доведення. Відомо [6, лема 1], що простір $G(\mathbb{R})$ – бочковий, тому $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+)$ буде бочковим як фактор-простір бочкового простору [2, гл.4, п.2]. Отже, $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ – бочковий як проективний тензорний добуток бочкових просторів. Доведемо, що в індуктивній границі $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+) \simeq \liminf_{|\nu|,|b|\to\infty} \mathcal{G}_\nu[0,b]$ вкладення $\Omega : \mathcal{G}_\nu[0,b] \subset \mathcal{G}_\mu[0,b']$ при $1 \preceq \nu \prec \mu$, $[0,b] \subset [0,b']$, є компактними. Нехай B – одинична куля в $\mathcal{G}_\nu[0,b]$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ виберемо m настільки велике, що $\left(\dfrac{\nu}{\mu}\right)^m < \dfrac{\varepsilon}{2}$. За теоремою Арцела-Асколі існує скінченна кількість функцій $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in B$ така, що для кожної функції $\varphi \in B$ знайдеться φ_j, $j = 1,\dots,n$, для якої $\|\partial^k(\varphi-\varphi_j)\|_{C[0,b]} \leq \varepsilon\mu^k k^{k\aleph}$, де $|k| \leq m$ і $C[0,b]$ – простір неперервних на відрізку $[0,b]$ функцій. Тоді послідовність $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ утворює ε-сітку для B в $\mathcal{G}_\mu[0,b']$. Отже, відображення Ω є компактним. Звідси випливає, що послідовність просторів $\{\mathcal{G}_\nu[0,b]\}_{\nu\succeq 1,\, b\in\mathbb{R}^n_+}$ є регулярною. Отже, простір $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ є (LN^*)-простором в сенсі Сілви [3, ст. 67, озн. 3]. Оскільки кожний простір типу (LN^*) є рефлексивним [3, ст. 71, теор. 3], то простір $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ також є рефлексивним. Нарешті, як відомо [6, ст. 168, лема 1], простір ультрадиференційовних функцій $G(\mathbb{R})$ є ядерним. Ядро $\operatorname{Ker}\Theta$ є замкненою множиною, а фактор-простір ядерного простору по замкненій множині знову є ядерним. Звідси висновок, що $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+)$ – ядерний, а тоді з означення випливає ядерність простору $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$. □

Нехай $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$ – алгебра лінійних неперервних відображень з топологією рівномірної збіжності на опуклих компактах. Множення в цій алгебрі будемо позначати через "$\circ$", а одиницю – через $I^n_{\mathcal{G}} = I_{\mathcal{G}} \otimes \dots \otimes I_{\mathcal{G}}$, де $I_{\mathcal{G}}$ – одиниця на $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}_+)]$.

Теорема 1. *Для кожного $j = 1,\dots,n$ сім'я операторів*

$$U_{\sigma_j} : \varphi(\tau) \longrightarrow U_{\sigma_j}\varphi(\tau) := \theta(s_j)\varphi(\tau_1,\dots,\tau_j+s_j,\dots,\tau_n),$$

де $s = (s_1,\dots,s_n) \in \mathbb{R}^n$ і $\sigma_j := \theta(s_j)s_j$, є одностайно неперервною (C_0)-напівгрупою в алгебрі $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$. Генератором цієї напівгрупи є оператор $i\partial_j$ правосторонньої частинної похідної по змінній $\tau_j \in [0,+\infty)$. Генератор $i\partial_j$ належить алгебрі $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$.

Доведення. З означення простору $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ випливає, що для довільної функції $\varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ існують вектори $\nu \succeq 1$ і $b \in \mathbb{R}^n_+$ такі, що

$$\varphi(\tau) = \sum_m \varphi_{1_m}(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_{n_m}(\tau_n),$$

де $\varphi_{j_m}(\tau_j) := \theta(t_j)\psi_{j_m}(t_j) \in \mathcal{G}_{\nu_j}[0,b_j]$ і $\psi_{j_m} \in G_{\nu_j}[-b_j,b_j]$.

Визначимо напівгрупу U_{σ_j} на множині функцій вигляду

$$\varphi_{1_m}(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_{n_m}(\tau_n) \in \mathcal{G}_{\nu_1}[0,b_1]\widetilde{\otimes} \cdots \widetilde{\otimes}\mathcal{G}_{\nu_n}[0,b_n].$$

Умова $\tau_j \in \operatorname{supp}\varphi_j$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\tau_j - \sigma_j \in \operatorname{supp}(U_{\sigma_j}\varphi_j)$, тобто

$$\operatorname{supp}(U_{\sigma_j}\varphi_j) = (\operatorname{supp}\varphi_j - \sigma_j)\bigcap[0,\infty), \quad \sigma_j \geq 0.$$

Для кожної функції $\varphi_j \in \mathcal{G}_{\nu_j}[0,b_j]$ виконується рівність $\partial_j^{k_j} U_{\sigma_j}\varphi_j = U_{\sigma_j}\partial_j^{k_j}\varphi_j$, для $j = 1,\dots,n$. Звідси, якщо $t_j \in (0,b_j)$, то $\partial_j^{k_j}\varphi_j(t_j) = \partial_j^{k_j}\psi_j(t_j)$. Тому

$$\|U_{\sigma_j}\varphi_j\|_{\mathcal{G}_{\nu_j}[0,b_j]} = \begin{cases} 0, & \sigma_j \ge b_j, \\ \sup\limits_{k_j\ge 0}\ \sup\limits_{0\le\tau_j+\sigma_j\le b_j} \frac{|U_{\sigma_j}\partial_j^{k_j}\varphi_j(\tau_j)|}{\nu_j^{k_j}k_j^{k_j\aleph}}, & \sigma_j < b_j, \end{cases}$$

і

$$\|U_{\sigma_j}\varphi_j\|_{\mathcal{G}_{\nu_j}[0,b_j]} \le \sup_{k_j\ge 0}\ \sup_{0\le\tau_j\le b_j} \frac{|\partial_j^{k_j}\varphi_j(\tau_j)|}{\nu_j^{k_j}k_j^{k_j\aleph}} = \|\varphi_j\|_{\mathcal{G}_{\nu_j}[0,b_j]},\ \sigma_j \ge 0.$$

Звідси отримуємо $U_{\sigma_j} \in L[\mathcal{G}_{\nu_1}[0,b_1]\widetilde{\otimes}\cdots\widetilde{\otimes}\mathcal{G}_{\nu_n}[0,b_n]]$. Тоді за означенням 1 маємо, що $U_{\sigma_j} \in L[\mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n)]$. Далі, для кожної функції $\psi_j \in G_{\nu_j}[-b_j,b_j]$ одержуємо, що

$$U_{\sigma_j}\varphi_j(\tau_j) = \theta(s_j)\theta(t_j)\psi(t_j+s_j), \quad \varphi_j = \theta\psi_j, \quad \sigma_j = s_j\theta(s_j), \quad \tau_j = t_j\theta(t_j).$$

За твердженням 2 існує функція $\varrho \in G_{2\nu_j\zeta(\aleph)}[-b_j-\nu_j, b_j+\nu_j]$ така, що $\varrho|_{[-b_j,b_j]} \equiv 1$. Тоді для чисел $|s_j| < \nu_j$ маємо $\operatorname{supp}[\varrho(t_j)\psi_j(t_j+s_j)] \subset [-b_j,b_j]$. З нерівності (4) випливає, що $\varrho(t_j)\psi_j(t_j+s_j) \in G_{2\nu_j\zeta(\aleph)}[-b_j,b_j]$ для $|s_j| < \nu_j$. Зрозуміло, що функція

$$(-\nu_j,\nu_j) \ni s_j \to \varrho(t_j)\psi_j(t_j+s_j) \in G_{2\nu_j\zeta(\aleph)}[-b_j,b_j], \quad t_j \in [-b_j,b_j],$$

є нескінченно диференційовною, бо $\psi_j(t_j+s_j) \in C^\infty$. Тому з розкладу функції $\psi(t_j+s_j)$ в ряд Тейлора випливає, що

$$\varrho(t_j)\psi(t_j+s_j) - \psi(t_j) - i\partial_j\psi(t_j)s_j = \frac{s_j^2}{2}\partial_j^2\psi(t_j+\quad s_j) \longrightarrow 0,$$

якщо $s_j \to 0$ і $0 < \quad < 1$. Для чисел $|s_j| < \nu_j$ одержимо, що $\varrho(t_j)\psi(t_j+s_j) = \psi(t_j+s_j)$, тобто відображення

$$G_{2\nu_j\zeta(\aleph)}[-b_j,b_j] \ni \psi_j(t_j+s_j) \longrightarrow \theta(s_j)\theta(t_j)\psi(t_j+s_j) \in G_{2\nu_j\zeta(\aleph)}[0,b_j]$$

є неперервним. А отже, напівгрупа належить класу (C_0) і на просторі $\mathcal{G}_\nu[0,b_j]$ має генератор $i\partial_j$. Отже, U_{σ_j} належить до класу (C_0) і має генератор $i\partial_j$ на $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n)$. З нерівності $(k_j+1)^{(k_j+1)\aleph} \le 2^{(k_j+1)\aleph}k_j^{k_j\aleph}$ отримуємо

$$\|\partial_j\varphi_j\|_{\mathcal{G}_{\nu_j}[0,b_j]} \le \nu_j \sup_{k_j\in\mathbb{Z}_+}\ \sup_{\tau_j\in[0,b_j]} 2^{(k_j+1)\aleph}\frac{|\partial_j^{k_j+1}\varphi_j(\tau_j)|}{\nu_j^{k_j+1}(k_j+1)^{(k_j+1)\aleph}} \le$$

$$\nu_j \sup_{k_j\in\mathbb{Z}_+}\ \sup_{\tau_j\in[0,b_j]} \frac{|\partial_j^{k_j+1}\varphi_j(\tau_j)|}{(2^{-\aleph}\nu_j)^{k_j+1}(k_j+1)^{(k_j+1)\aleph}} \le \nu_j\|\varphi_j\|_{\mathcal{G}_{\mu_j}[0,b_j]},$$

де покладено $\mu_j = \nu_j 2^{-\aleph}$. Отже, $\|\partial_j\varphi\|_{\mathcal{G}_{\nu_1}[0,b_1]\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}\mathcal{G}_{\nu_n}[0,b_n]} \le \nu_j\|\varphi\|_{\mathcal{G}_{\mu_1}[0,b_1]\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}\mathcal{G}_{\mu_n}[0,b_n]}$, звідки маємо, що $\partial_j \in L[\mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n)]$. Далі, з регулярності індуктивної границі

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n) = \liminf_{\nu\succ 1, b\succ 0} \mathcal{G}_{\nu_1}[0,b_1]\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}\mathcal{G}_{\nu_n}[0,b_n]$$

випливає, що набір $\{U_{\sigma_j} : \sigma_j \ge 0\}$ є одностайно обмеженою (C_0)-напівгрупою над простором $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n)$. Нарешті, оскільки $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n)$ – рефлексивний та бочковий (твердження 3), то за теоремою Банаха-Штейнгауза сім'я операторів $\{U_{\sigma_j} : \sigma_j \ge 0\}$ є одностайно неперервною. Теорему доведено. □

Тензорний добуток (C_0)-напівгруп операторів зсуву U_{σ_j} з генераторами $i\partial_j$ $(j = 1,\dots,n)$ надалі ми будемо позначати через $U_\sigma := U_{\sigma_1}\otimes\dots\otimes U_{\sigma_n}$. Зрозуміло, цей тензорний добуток є n-параметричною (C_0)-напівгрупою.

Визначимо спряжений простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n)$, який будемо позначати за аналогією до розподілів Шварца через $\mathcal{G}'(\mathbb{R}_+^n)$. Ці функціонали звичайно називають ультрарозподілами класу Жевре в куті $\mathbb{R}_+^n$. Очевидно, що виконується вкладення $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n) \subset \mathcal{G}'(\mathbb{R}_+^n)$. Білінійна форма вигляду

$$\mathcal{G}'(\mathbb{R}_+^n) \times \mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n) \ni (f,\varphi) \longrightarrow \langle f,\varphi\rangle \in \mathbb{C}$$

породжує двоїстість $\langle \mathcal{G}'(\mathbb{R}_+^n), \mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n)\rangle$.

Надалі на просторі $\mathcal{G}'(\mathbb{R}_+^n)$ сильну топологію відносно цієї двоїстості $\langle \mathcal{G}'(\mathbb{R}_+^n), \mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n)\rangle$ позначаємо через $\beta(\mathcal{G}'(\mathbb{R}_+^n), \mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n))$, а слабку – через $\sigma(\mathcal{G}'(\mathbb{R}_+^n), \mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n))$.

Твердження 4. *Простір $\mathcal{G}'(\mathbb{R}_+^n)$ – бочковий, рефлексивний і ядерний в сильній топології $\beta(\mathcal{G}'(\mathbb{R}_+^n), \mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n))$ відносно двоїстості $\langle \mathcal{G}'(\mathbb{R}_+^n), \mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n)\rangle$.*

Доведення. Твердження безпосередньо випливає з відомого факту, що названі властивості справедливі для сильно спряжених просторів, як тільки ними володіють їх передспряжені. □

Твердження 5. *Існує неперервна функція $\omega_\varepsilon \in \mathcal{G}_{2\zeta(\aleph)/\varepsilon}[0,\varepsilon]$ така, що*

$$\omega_\varepsilon \xrightarrow{\sigma(\mathcal{G}',\mathcal{G})} \delta, \quad \varepsilon \to 0^+,$$

де $\delta = \delta_1\otimes\dots\otimes\delta_n \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}_+^n)$ і $\delta_i \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}_+)$ $(i = 1,\dots,n)$ є функціями Дірака одного аргументу. Для довільної функції $\varphi(\tau) = \varphi_1(\tau_1)\cdot\ldots\cdot\varphi_n(\tau_n) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_+^n)$ виконується рівність

$$\langle\delta,\varphi\rangle = \langle\delta_1,\varphi_1\rangle\cdot\ldots\cdot\langle\delta_n,\varphi_n\rangle = \varphi_1(0)\cdot\ldots\cdot\varphi_n(0). \tag{10}$$

Доведення. З теореми Карлемана-Данжуа [5, гл.I, теор.1.3.8] випливає, що для довільного $k^\aleph$ $(k \in \mathbb{Z}_+^n)$ існують функції ψ_j $(j = 1,\dots,n)$ такі, що

$$|\partial_j^{k_j}\psi_j| \le 2[2\zeta(\aleph)]^{k_j}k_j^{k_j\aleph}, \quad |\operatorname{supp}\psi_j| \le 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\psi_j(t_j)dt_j = 1, \quad \psi_j \in G_{2\zeta(\aleph)}[-1,1].$$

Тоді функція $\omega(\tau) = \omega_1(\tau_1)\cdot\ldots\cdot\omega_n(\tau_n)$, де $\omega_j = \theta_j\psi_j$, для довільного $k \in \mathbb{Z}_+^n$ задовольняє співвідношення

$$|\partial^k\omega| \le 2^n[2\zeta(\aleph)]^{|k|}k^{k\aleph}, \quad \operatorname{supp}\omega \subset [0,1], \quad \int_{\mathbb{R}_+^n}\omega(\tau)d\tau = \frac{1}{2^n}.$$

Отже, для функції $\omega_\varepsilon(\tau) = \varepsilon^{-n}\omega(\tau/\varepsilon)$ отримаємо

$$|\partial^k \omega_\varepsilon| \le \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \left(\frac{2\zeta(\aleph)}{\varepsilon}\right)^{|k|} k^{k\aleph}, \quad \operatorname{supp}\omega_\varepsilon \subset [0,\varepsilon], \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \omega_\varepsilon(\tau)d\tau = \frac{1}{2^n}.$$

Для довільної функції $\varphi(\tau) = \varphi_1(\tau_1)\cdot\ldots\cdot\varphi_n(\tau_n) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \omega_\varepsilon(\tau)\varphi(\tau)d\tau - \varphi(0)\right| \le \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\omega_\varepsilon(\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(0))|d\tau \le$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\max_{\tau\in[0,\varepsilon]}|\varphi(\tau)-\varphi(0)|\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\omega_\varepsilon(\tau)d\tau = \lim_{\tau_1\to 0^+}\frac{\varphi_1(\tau_1)-\varphi_1(0)}{2}\cdot\ldots\cdot\lim_{\tau_n\to 0^+}\frac{\varphi_n(\tau_n)-\varphi_n(0)}{2} = 0,$$

звідки і буде випливати справедливість рівності (10). □

Встановимо тепер важливу теорему про зображення простору ультрарозподілів $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ в алгебрі лінійних операторів над $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$.

Теорема 2. *Відображення*

$$T: \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+) \ni f \longrightarrow T_f \in L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)], \tag{11}$$

визначене співвідношенням $(T_f\varphi)(\tau) = \langle f(\sigma), U_\sigma\varphi(\tau)\rangle$, $\varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$, *здійснює лінійний топологічний ізоморфізм на комутант* (C_0)*-напівгрупи операторів* $[U_\sigma]^c$ *в алгебрі* $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$.

Обернене відображення $T^{-1}\colon [U_\sigma]^c \longrightarrow \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ *однозначно визначає згортку ультрарозподілів*

$$\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+) \times \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+) \ni (f,g) \to f * g \equiv T^{-1}(T_f \circ T_g) \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+), \tag{12}$$

відносно якої $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ *є алгеброю з одиницею* δ. *При цьому одиничному оператору при відображенні* T^{-1} *відповідає* δ*-функція.*

Доведення. Очевидно, що ядро $\operatorname{Ker} T$ є тривіальним і відображення (11) є лінійним. Для спряженої (C_0)-напівгрупи операторів U'_σ відносно двоїстості $\langle \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+),\, \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)\rangle$ з рівності $\partial^k(T_f\varphi) = T_f\partial^k\varphi$ та з неперервності функціоналу f отримуємо

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^n_+}\sup_{\tau\in[0,b]}\frac{|\partial^k(T_f\varphi)(\tau)|}{\nu^k k^{k\aleph}} \le \|U'_\sigma f\|_{\mathcal{G}'_\nu[0,b]}\sup_{k\in\mathbb{Z}^n_+}\sup_{\tau\in[0,b]}\frac{|\partial^k\varphi(\tau)|}{\nu^k k^{k\aleph}}, \qquad \varphi\in\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+).$$

Оскільки $(T_f\varphi)(\tau) = \langle f(\sigma),\, \theta(t)\varphi(t+\sigma)\rangle$ для $\tau = \theta(t)t$ та $\sigma \in \mathbb{R}^n_+$, а також $U_\rho\varphi_\tau = \theta(r)\varphi(\tau+r)$ для $\rho = \theta(r)r$ та $r \in \mathbb{R}^n$, то маємо

$$U_\rho \circ T_f\varphi(\tau) = \langle f(\sigma),\, \theta(r)\theta(t)\varphi(\sigma+r+t)\rangle = \langle f(\sigma),\, \theta(t)U_\rho\varphi(\sigma+t)\rangle = T_f \circ U_\rho\varphi(\tau).$$

Нехай тепер $T_0 \in L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$ є довільний оператор такий, що $T_0 \circ U_\sigma = U_\sigma \circ T_0$. Для довільної функції $\varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ лінійний неперервний функціонал $g: \varphi \longrightarrow T_0\varphi(0)$ визначає розподіл $g \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$, тобто $\langle g,\, \varphi\rangle = T_0\varphi(0)$. Замінюючи в цій рівності функцію φ на $U_\sigma\varphi$, отримуємо $\langle g,\, U_\sigma\varphi\rangle = T_0 \circ U_\sigma\varphi(0)$. Тому

$$T_\sigma\varphi(\tau) = \langle g(\sigma),\, U_\sigma\varphi(\tau)\rangle = \langle g(\sigma),\, U_\tau\varphi(\sigma)\rangle = T_0 \circ U_\tau\varphi(0) = U_\tau \circ T_0\varphi(0) = T_0\varphi(\tau).$$

Отже, $T_0 = T_\sigma$ і відображення (11) здійснює алгебраїчний сюр'єктивний ізоморфізм на комутант $[U_\sigma]^c$.

Оскільки простори $\mathcal{G}_\nu[0,b]$ є інваріантними відносно дії операторів T алгебри $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$, то комутант $[U_\sigma]^c$ всіх таких операторів в алгебрі $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$ належить проективній границі $\lim\limits_{\nu,b\succ 0}\operatorname{pr} L[\mathcal{G}_\nu[0,b]]$, де в просторах $L[\mathcal{G}_\nu[0,b]]$ задано топології рівномірної збіжності на опуклих компактах. Проективна границя ізоморфно вкладається в $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$, тому до T можна застосувати теорему про відкрите відображення, в силу якої отримуємо, що T реалізує топологічний ізоморфізм $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+) \simeq [U_\sigma]^c$.

Доведемо другу частину теореми. Для довільних ультрарозподілів $f, g \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ маємо $T_f \circ T_g \in [U_\sigma]^c$, і комутант $[U_\sigma]^c$ є підалгеброю в $L[\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)]$ з одиницею $I^n_{\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)}$. Тоді $f * g = T^{-1}(T_f \circ T_g) \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$, зокрема для δ-функції $T_\delta\varphi(\tau) = \langle\delta(\sigma),\, U_\sigma\varphi(\tau)\rangle = \varphi(\tau)$ і $\delta * f = T^{-1}(T_f \circ T_\delta) = T^{-1}T_f = f$. Тобто відображення (12) визначає згортку ультрарозподілів з $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$, і відносно цієї згортки простір $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ є алгеброю. Теорему доведено. □

Твердження 6. *Для довільного ультрарозподілу* $f \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ *в слабкій топології* $\sigma(\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+),\, \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+))$ *виконується збіжність*

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+) \ni f_\varepsilon \equiv T_f\omega_\varepsilon \to f, \quad \varepsilon \to 0^+,$$

тобто в загальному випадку $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+) \equiv \overline{\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)}$ *в слабкій топології простору* $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$.

Доведення. Для довільної функції $\varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ та спряженого оператора $T'_f \in L[\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)]$ справедливі рівності

$$\langle T'_f\omega_\varepsilon, \varphi\rangle = \langle\omega_\varepsilon, T_f\varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\omega_\varepsilon(\tau)\langle f(\sigma), U_\sigma\varphi(\tau)\rangle d\tau =$$

$$\left\langle f(\sigma), U_\sigma\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\omega_\varepsilon(\tau)\varphi(\tau)d\tau\right\rangle \stackrel{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \langle f(\sigma), U_\sigma\varphi(0)\rangle = \langle f, \varphi\rangle,$$

де ω_ε – регулярний ультрарозподіл в просторі $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$. □

Література

1. Лопушанський О.В., Соломко А.В. Операторне числення для генераторів сильно неперервних операторних напівгруп в алгебрі ультрарозподілів класу Жевре (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача). – Львів, 2007. – 22 с.
2. Робертсон А., Робертсон. В. Топологические векторные пространства: Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 257 с.
3. Себаштьян-и-Силва Ж. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях* // Сб. Математика. – 1957. – Т.1, №1. – С. 60-77.
4. Соломко А.В., Шарин С.В. *Функціональне числення над банаховими просторами в конусі* $\mathbb{R}^n_+$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т.47, №4. – С. 51-56.
5. Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Теория распределений и анализ Фурье.* – Т.1. – М.: Мир, 1986. – 462 с.

6. Grasela K. *Generalized derivations and Fourier transform of polinomial ultradistributions* // Matematychni Studii, **20**, 2 (2003), 167-178.

7. Komatsu H. *Ultradistributions I. Structure theorems and a characterization* // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math., 20 (1973), 25-105.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 7.09.2009

Solomko A.V *Operator representation of Gevrey ultradistributions algebra with supports on positive n-dimensional angle*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 197–206.

The representation of convolution Gevrey algebra of ultradistributions as commutant of the n-parametric strongly continuous semigroup of shifts in algebra of linear and continuous mappings over the space of ultradifferentiable Gevrey functions with supports on positive n-dimensional angle is proved.

Соломко А.В *Операторное изображение алгебры ультрараспределений Жевре с носителями в положительном n-измеримом угле // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 197–206.

Для построенной двойственности ультрараспределений Жевре и ультрадифференцируемых функций доказана теорема об изображении сверточной алгебры ультрараспределений типа Жевре в виде коммутанта сильно непрерывной полугруппы сдвигов в алгебре линейных непрерывных отображений над пространством ультрадифференцируемых функций с носителями в положительном n-измеримом угле.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 513.88

Сторож О.Г.

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ДВОМА ПАРАМИ ЛІНІЙНИХ ВІДНОШЕНЬ ТА ДИСИПАТИВНІ РОЗШИРЕННЯ ДЕЯКИХ НЕЩІЛЬНО ВИЗНАЧЕНИХ ОПЕРАТОРІВ

Сторож О.Г. *Зв'язок між двома парами лінійних відношень та дисипативні розширення деяких нещільно визначених симетричних операторів. // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 207–213.

Встановлено загальний вигляд максимально дисипативного відношення-розширення (зокрема, оператора-розширення) скінченновимірного нещільно визначеного звуження симетричного оператора з довільними дефектними числами.

1 Термінологія, основні позначення та додаткові твердження

Теорія лінійних відношень у гільбертовому просторі, започаткована Р. Аренсом [9], знайшла широкі застосування у багатьох галузях математики, зокрема, в теорії розширень лінійних операторів. Різноманітні питання цієї теорії досліджували Е.А. Кодінгтон [10], А. Дійксма та С.В. де Сну [11], А.В. Штраус [8], А.Н. Кочубей [4, 5], В.М. Брук [2] та інші математики.

У цій праці встановлено загальний вигляд максимально дисипативного відношення-розширення (зокрема, оператора-розширення) скінченновимірного (нещільно визначеного) звуження симетричного оператора з довільним індексом дефекту. Тим самим деякі результати А.Н. Кочубея [4] і автора [7] перенесено на ширші класи операторів. Крім цього, доведено одне твердження, що стосується теорії лінійних відношень, та наслідок з нього, які, можливо, мають самостійний інтерес.

Ми використовуємо такі позначення:

$D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ – відповідно область визначення, область значень та многовид нулів лінійного оператора T;

T^* – оператор, спряжений з оператором T;

$(\cdot|\cdot)$, $\oplus$, $\perp$ – символи скалярного добутку, ортогональної суми та ортогонального доповнення відповідно;

2000 *Mathematics Subject Classification:* 47B44, 47B25.
Ключові слова і фрази: симетричний оператор, оператор-розширення, максимально дисипативне відношення-розширення, дефектні числа.

© Сторож О.Г., 2009

AE – образ множини E при відображенні A;

$\mathbb{I}_X$ – тотожне перетворення множини X;

$A \downarrow E$ – звуження відображення A на множину E;

якщо $X,\ Y$ – гільбертові простори, то під $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{B}(X,Y)$ розуміємо класи лінійних замкнених щільно визначених операторів у просторі X та лінійних неперервних операторів $A: X \to Y$таких, що $D(A)=X$ відповідно.

Нехай H – комплесний гільбертів простір, а $H^2 \stackrel{def}{=} H \oplus H$. Нагадаємо, що (замкненим) лінійним відношенням у просторі H називають довільний (замкнений) лінійний многовид $T \subset H^2$, а область визначення, область значень та спряжене відношення визначають таким чином:

$$D(T^*) = \{y \in H : (\exists z \in H)\ (y,z) \in T\}, \quad R(T) = \{z \in H : (\exists y \in H)\ (y,z) \in T\},$$

$$T^* = \left\{(y_2, z_2) \in H^2 :\ \forall\,(y_1, z_1) \in T \quad (z_1|y_2) - (y_1|z_2) = 0\right\}.$$

Легко бачити, що

$$T^* = (JT)^\perp = JT^\perp, \tag{1}$$

де

$$J(h_1, h_2) = (-ih_2,\ ih_1) \quad (h_1,\ h_2 \in H). \tag{2}$$

Відношення T називають симетричним або самоспряженим, якщо $T \subset T^*$ або $T = T^*$ відповідно. Його називають дисипативним (акумулятивним), якщо для будь-якого $(y,z) \in T$, $\quad Im(z|y) \geq 0\,(\leq 0)$ і максимально дисипативним (максимально акумулятивним), якщо воно, крім цього, не має нетривіальних дисипативних (акумулятивних) розширень. Нагадаємо, також, що в теорії лінійних відношень оператор ототожнюють з його графіком.

2 Основні результати

Теорема 1. *Нехай L та L_0 – замкнені лінійні відношення в H, причому $L_0 \subset L$. Приймемо $M \stackrel{def}{=} L_0^*$, $\quad M_0 \stackrel{def}{=} L^*$ і визначимо підпростори $U \subset H^2$, $\quad V \subset H^2$, виходячи з рівностей $L = L_0 \oplus U$, $\quad M = M_0 \oplus V$. Тоді*

$$V = JU, \tag{3}$$

де J визначено згідно з (2).

Доведення. Зрозуміло, що тотожність $L_0^\perp \cap L = U$ можна переписати у вигляді $L_0^\perp = L^\perp \oplus U$. Оскільки J – унітарний оператор, то звідси випливає, що $JL_0^\perp = JL^\perp \oplus JU$. Беручи до уваги (1), бачимо, що $L_0^* = L^* \oplus JU$. Очевидно, що остання рівність та (3) рівносильні. □

Зауваження 1. *Нехай $L,\ L_0 \in \mathcal{C}(H)$, причому $L_0 \subset L$. Приймемо $M \stackrel{def}{=} L_0^*$, $\quad M_0 \stackrel{def}{=} L^*$ і визначимо підпростори H_L, H_M рівностями*

$$D(L) = D(L_0) \oplus_L H_L, \quad D(M) = D(M_0) \oplus_M H_M,$$

де $\oplus_T$ – символ суми, ортогональної відносно скалярного добутку графіка оператора T. В.Е. Лянце [6] довів, що в цьому випадку $H_M = LH_L$ і для будь-якого $u \in H_L, MLu = -u$.

Зрозуміло, що у випадку лінійних операторів теорема 1 та теорема В.Е. Лянце еквівалентні.

Наслідок 1. *Нехай $\ L_0 \in \mathcal{C}(H)$. Припустимо, що H_0 – скінченновимірний підпростір простору H і визначимо оператор S_0 за допомогою співвідношень:*

$$D(S_0) = D(L_0) \cap H_0^\perp, \quad S_0 \subset L_0.$$

Тоді

$$S_0^* = \{(y, L_0^* y + \varphi) : y \in D(L_0^*),\ \ \varphi \in H_0\} \stackrel{def}{=} G^*.$$

Доведення. Нехай $\{\varphi_1, ..., \varphi_r\}$ – база підпростору H_0 , і

$$\forall \alpha \in D(L_0) \ \ \Phi\alpha \stackrel{def}{=} ((\alpha|\varphi_1), ..., (\alpha|\varphi_r)), \quad l_\xi(\alpha) \stackrel{def}{=} (\alpha|\xi)_{L_0},$$

де $(\xi, L_0\xi) \in L_0 \cap S_0^\perp$ (нагадаємо, що ми ототожнюємо оператор з його графіком). Зрозуміло, що $\ker\Phi = D(S_0) \subset \ker l_\xi$, тому існують $c_1, ..., c_r \in \mathbb{C}$ такі, що

$$\forall \alpha \in D(L_0) \ \ (\alpha|\xi) + (L_0\alpha|L_0\xi) = \sum_{i=1}^r c_i(\alpha|\varphi_i).$$

Приймемо $\varphi = -\sum_{i=1}^r \bar{c}_i\varphi_i$. Маємо: $\forall \alpha \in D(L_0) \ \ (L_0\alpha|L_0\xi) = (\alpha| - \varphi - \xi)$. А це означає, що $L_0\xi \in D(L_0^*)$, $\ \ L_0^*L_0\xi = -\xi - \varphi$. Виходячи звідси і застосовуючи теорему 1 до пари L_0, S_0, бачимо, що $S_0^* \cap (L_0^*)^\perp = J[L_0 \cap S_0^\perp] \subset G^*$, а отже, $S_0^* \subset G^*$. Обернене твердження очевидне. □

Зауваження 2. *У випадку, коли оператор L_0 є симетричним, це твердження було доведено в [10].*

Зауваження 3. *У праці А.Н. Кочубея [5] було показано, що будь-яке дисипативне розширення S симетричного відношення S_0 задовольняє умову $S \subset S_0^*$. Наведемо інше доведення цього твердження.*

Нехай $(y,\ z) \in S$. Тоді для будь-яких $\alpha \in \mathbb{C}$, $(u,v) \in S_0 \quad (u,v) + \alpha(y,z) = (u + \alpha y, v + \alpha z) \in S$. Оскільки $Im(v,u) = 0$, то $0 \leq Im(v + \alpha z|u + \alpha y) = Im\,[\alpha(z|u) + \bar{\alpha}(v|y)] + Im\left(|\alpha|^2\,(z|y)\right)$, а, отже, $\forall \alpha \in \mathbb{C} \ \ Im\,[\alpha\,((z|u) - (y|v))] + |\alpha|^2\,Im(z|y) \geq 0$. Нехай $\alpha = |\alpha|\,\theta$, де $|\theta| = 1$. Маємо (скорочуючи на $|\alpha|$) $|\alpha|\,Im(z|y) + Im\,[\theta\,((z|u) - \ (y|v))] \geq 0$.

Спрямовуючи $|\alpha|$ до нуля, отримуємо: $|\theta| = 1 \Rightarrow Im\,[\theta\,((z|u) - (y|v))] \geq 0$. А це можливе тільки при $(z|u) - (y|v) = 0$. Таким чином, $\forall (u,v) \in S_0\ (z|u) = (y|v)$, а отже, $(y|z) \in S_0^*$.

Нижче в термінах абстрактних крайових умов встановлено критерії максимальної дисипативності для відношень-розширень (зокрема, для операторів-розширень) оператора S_0, описаного в наслідку 1, у ситуації, коли L_0 – симетричний оператор: $L_0 \subset L_0^* \stackrel{def}{=} L$. Під $(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-, \delta_+, \delta_-)$ ми розуміємо фіксований антисиметричний простір граничних значень оператора L_0 (в сенсі означення, запропонованого в [7]), а під P_0 – ортопроектор $H \to H_0$.

Лема 1. *Для будь-яких* $y \in D(L)$, $\varphi \in H_0$

$$2Im(Ly+\varphi|y) = \left\| \left(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + iP_0 y)\right) \right\|^2_{\mathcal{H}^+ \oplus H_0} - \left\| \left(\delta_- y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - iP_0 y)\right) \right\|^2_{\mathcal{H}^- \oplus H_0}. \quad (4)$$

Дійсно,

$$2iIm(Ly+\varphi|y) = (Ly+\varphi|y) - (y|Ly+\varphi) = (Ly|y) - (y|Ly) + (\varphi|P_0 y) - (P_0 y|\varphi) =$$

$$i\left[(\delta_+ y|\delta_+ y)_{\mathcal{H}^+} - (\delta_- y|\delta_- y)_{\mathcal{H}^-}\right] +$$

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + iP_0 y)|\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + iP_0 y)\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - iP_0 y)|\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - iP_0 y)\right)\right].$$

Теорема 2. *Для будь-якого стиску* $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^+ \oplus H_0, \mathcal{H}^- \oplus H_0)$ *підпростір, що складається з тих елементів* $\{(y, Ly+\varphi)\} \subset S_0^*$, *які задовольняють умову*

$$K\left(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + iP_0 y)\right) - \left(\delta_- y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - iP_0 y)\right) = 0, \quad (5)$$

є максимально дисипативним розширенням оператора S_0.

Навпаки, будь-яке максимально дисипативне відношення-розширення S *оператора* S_0 – *це частина простору* S_0^*, *яка виділяється умовою* (5).

Доведення. Будемо без додаткових роз'яснень використовувати основні положення теорії лінійних просторів з індефінітною метрикою, викладені, наприклад, в [1].

Введемо позначення : $G^\pm = \mathcal{H}^\pm \oplus H_0$, $G = G^+ \oplus G^-$,

$$I(h^+, h_1, h^-, h_2) = (h^+, h_1, -h^-, -h_2) \quad (h^\pm \in \mathcal{H}^\pm, h_1, h_2 \in H_0).$$

Зрозуміло, що $(G,\ I)$ є простором Крейна. Простором Крейна є також (H^2, J), де J визначено згідно з (2). Це випливає з рівностей $I = I^* = I^{-1}$, $J = J^* = J^{-1}$. Далі, рівність

$$(Jw|w) = 2Im\,(z|y)\,,\ \text{де } w = (y,z) \in H^2,$$

показує, що відношення S є дисипативним в H тоді і тільки тоді, коли S – невід'ємний лінеал в (H^2, J), а рівність (4) та зауваження 2 переконують, що у випадку, коли $S_0 \subset S \subset S_0^*$,

$$\left\{\left(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + iP_0 y), \delta_- y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - iP_0 y)\right) \in G : (y, Ly+\varphi) \in S\right\}$$

є невід'ємним лінеалом в $(G,\ I)$, причому максимальна дисипативність відношення S рівносильна максимальній невід'ємності відповідного лінеалу. Але, як доведено в цитованій вище монографії, лінеал $\mathcal{L}$ є максимальним невід'ємним в $(G,\ I)$ тоді і тільки тоді, коли існує оператор $K \in \mathcal{B}(G^+, G^-)$ такий, що $\|K\| \le 1$ і

$$\mathcal{L} = \left\{(h^+, h_1, h^-, h_2) \in G : K(h^+, h_1) = (h^-, h_2)\right\}.$$

Для завершення доведення досить прийняти до уваги зауваження 3. □

Зауваження 4. *Аналогічним чином фомулюються умови максимальної акумулятивності, симетричності, а у випадку, коли* L_0 *має однакові дефектні числа, – і самоспряженості розширення-відношення* S *оператора* S_0 *(пор. зі сказаним в [2 – 4]). Крім цього, застосовуючи міркування, наведені в [7], неважко переконатися в правильності такого твердження.*

Наслідок 2. *Лінійне відношення* $S \supset S_0$ *є максимально дисипативним тоді і тільки тоді, коли існують оператори* $A^\pm \in \mathcal{B}(G^\pm, G^-)$ *такі, що*

$$A^+(A^+)^* \le A^-(A^-)^*, \quad \ker A^- = \{0\}\,,$$

а S *складається з тих елементів* $\{(y, Ly+\varphi)\} \subset S_0^*$, *які задовольняють умову*

$$A^+\left(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + iP_0 y)\right) + A^-\left(\delta_- y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - iP_0 y)\right) = 0.$$

Виділимо тепер з-поміж відношень S, описаних в теоремі 2, ті, які є операторами (ми ототожнюємо оператор та його графік), тобто опишемо максимально дисипативні оператори-розширення оператора S_0. Для цього позначимо через π_1, π_2 ортопроектори $G^- \to \mathcal{H}^-$, $G^- \to H_0$ відповідно (маються на увазі ототожнення $\mathcal{H}^- \leftrightarrow \mathcal{H}^- \oplus \{0\}$, $H_0 \leftrightarrow \{0\} \oplus H_0$) , а оператори $W : D(L) \to G^-$, $\Lambda : H_0 \to G^-$ визначимо таким чином:

$$\forall y \in D(L) \quad Wy = -\sqrt{2}\left(K(\delta_+ y,\ \frac{i}{\sqrt{2}}P_0 y) + (\delta_- y,\ \frac{i}{\sqrt{2}}P_0 y)\right);$$

$$\forall h \in H_0 \quad \Lambda(0,h) = K(0,h) - (0,h).$$

Теорема 3. *В умовах теореми 2,* S *є (максимально дисипативним) оператором-розширенням оператора* S_0 *тоді і тільки тоді, коли*

$$\ker \Lambda = \{0\}. \quad (6)$$

У цьому випадку

$$D(S) = \left\{y \in D(S_0^*) : Wy \in R(\Lambda),\ \pi_1 \Lambda^{-1} Wy = 0\right\}, \quad (7)$$

$$\forall y \in D(S) \ \ Sy = Ly + \pi_2 \Lambda^{-1} Wy. \quad (8)$$

Доведення. Перш за все, зазначимо, що відношення S є оператором тоді і тільки тоді, коли $S(0) \overset{def}{=} \{z \in H : (0,z) \in S\} = \{0\}$. Беручи до уваги (5), цю рівність можна переписати так:

$$\{\varphi \in H_0 : K(0,\varphi) = (0,\varphi)\} = \{0\}. \quad (9)$$

Зрозуміло, що умови (6) та (9) рівносильні.

Для знаходження $D(S)$ та φ подамо (5) таким чином:

$$K\left(\delta_+ y, \frac{i}{\sqrt{2}}P_0 y\right) + K\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\right) + \left(\delta_- y, \frac{i}{\sqrt{2}}P_0 y\right) - \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\right) = 0,$$

тобто

$$\Lambda(0,\varphi) = Wy. \tag{10}$$

Іншими словами, $y \in D(S)$ тоді і тільки тоді, коли

$$Wy \in R(\Lambda) = D(\Lambda^{-1}), \tag{11}$$

і в цьому випадку $(0,\varphi) = \Lambda^{-1}Wy$, тобто

$$\pi_1\Lambda^{-1}Wy = 0, \quad \pi_2\Lambda^{-1}Wy = \varphi. \tag{12}$$

Ясно, що умови (11) – (12) рівносильні умовам (7) – (8). Теорему доведено. □

Приклад 1. *Нехай* $H_0 = \{0\}$, *тобто* $S_0 = L_0$. *У цьому випадку рівняння* (10) *набуває вигляду*

$$K\delta_+ y + \delta_- y = 0. \tag{13}$$

Тому будь-яке максимально дисипативне розширення оператора L_0 *являє собою звуження оператора* L, *яке визначається умовою* (13), *де* $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-)$ – *деякий стиск. Це цілком узгоджується з результатами праці [7].*

Приклад 2. *Нехай стиск* K, *за допомогою якого визначається максимально дисипативний оператор* (7) – (8), *має "діагональний" вигляд, тобто*

$$\forall h \in \mathcal{H}^+,\ \forall\varphi \in H_0 \quad K(h,\varphi) = K_1 h + K_2\varphi \ \left(K_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-),\ K_2 \in \mathcal{B}(H_0)\right).$$

Як показують прямі обчислення, в цьому випадку рівняння (10) *еквівілентне системі*

$$\begin{cases} K_1\delta_+ y + \delta_- y = 0 \\ (K_2 - \mathbb{I}_{H_0})\varphi = \frac{i}{\sqrt{2}}(K_2 + \mathbb{I}_{H_0})P_0 y, \end{cases},$$

тобто

$$D(S) = \{y \in D(L) : K_1\delta_+ y + \delta_- y = 0\},$$

$$\forall y \in D(S),\ Sy = Ly + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(K_2 - \mathbb{I}_{H_0}\right)^{-1}\left(K_2 + \mathbb{I}_{H_0}\right)P_0 y.$$

Таким чином, S – *адитивне збурення деякого розширення оператора* L_0.

Література

1. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 352 с.
2. Брук В.М. *О расширениях симметрических отношений* // Мат. заметки. – 1977. – Т.22, №6. – С. 825-834.
3. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.
4. Кочубей А.Н. *О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений* // Мат. заметки. – 1975. – Т.17, №1. – С. 41-48.
5. Кочубей А.Н. *О расширениях неплотно заданного симметрического оператора* // Сиб. мат. журн. – 1977. – Т.18, №2. – С. 314-320.
6. Лянце В.Э. *О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами* // Докл. АН СССР. – 1972. – Т.204, №3. – С. 542-545.
7. Сторож О.Г. *О расширениях симметрических операторов с неравными дефектными числами* // Мат. заметки. – 1984. – Т.36, №5. – С. 791-796.
8. Штраус А.В. *О расширениях и характеристической функции симметрического оператора* // Изв. АН СССР. – 1968. – Т.32, №1. – С. 186-207.
9. Arens R. *Operational calculus of linear relations*, Pacif. J. Math., **11**, 1 (1961), 9-23.
10. Coddington E.A. *Self-adjoint subspace extensions of nondensely defined linear operators*, Bull. Amer. Math. Soc., **79**, 4 (1973), 712-715.
11. Dijksma A., de Snoo H.S. *Self-adjoint extensions of symmetric subspaces*, Pacif. J. Math., **54**, 1 (1974), 71-100.

Львівський національний університет ім. І. Франка,
Львів, Україна.

Надійшло 30.10.2009

Storozh O.G. *A correlation between two pairs of linear relations and dissipative extensions of some nondensely defined symmetric operators.*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 207–213.

A general form of a maximal dissipative subspace extension (in particularly of an operator extension) of a finite-dimensional nondensely defined restriction of a symmetric operator with arbitrary defect numbers is established.

Сторож О.Г. *Связь между двумя парами линейных отношений и диссипативные расширения некоторых неплотно определенных симметрических операторов. // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 207–213.

Установлен общий вид максимально диссипативного отношения-расширения (в частности, оператора-расширения) конечномерного неплотно определенного сужения симметрического оператора с произвольными дефектными числами.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 517.98

Чернега І.В.

СИМЕТРИЧНІ ПОЛІНОМИ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Чернега І.В. *Симетричні поліноми на банахових просторах* // *Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 214–233.

В роботі наводиться огляд основних результатів про симетричні поліноми на банахових просторах та переставно-інваріантних просторах функцій. Наведено застосування до банахових алгебр та доведено деякі нові результати в цьому напрямку.

Вступ

Симетричні поліноми та симетричні функції мають широке застосування в математиці та математичній фізиці. Так, вони присутні в елементарній математиці (теорема Вієта), в теорії представлень симетричних груп і повних лінійних груп над полем комплексних чисел або скінченними полями. Вони також є важливими об'єктами в алгебраїчній комбінаториці.

Симетричні поліноми на скінченновимірних просторах є об'єктом класичної алгебри. Поняття про симетричні поліноми на гільбертових просторах і, більш загально, на просторах ℓ_p і $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, вперше було введено А.С. Немировським та С.М. Семеновим [17]. Ними було, зокрема, доведено теореми про те, що кожен симетричний поліном на гільбертовому просторі, просторах ℓ_p і $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, виражається через елементарні симетричні поліноми на цих просторах.

В роботі [9] М. Гонзалесом, Р. Гонзало і Х. Харамілло ці результати узагальнено на дійсні банахові простори з деякою симетричною структурою, так звані переставно-інваріантні простори функцій.

Субсиметричні поліноми були введені в [17] на просторах ℓ_p, згодом досліджувалися в статтях [11], [10]. Так, в [10] Р. Гонзало досліджує цей вид поліномів на банахових просторах з субсиметричним базисом. Зокрема, нею описано лінійний базис у скінченновимірному просторі n-однорідних субсиметричних поліномів.

В [1] автором отримано результати, які стосуються симетричних поліномів на просторі ℓ_p. А саме, використовуючи введений в даній роботі оператор симетричного зсуву,

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46-02, 46E30, 46J20.
Ключові слова і фрази: симетричні поліноми на банахових просторах, симетричні аналітичні функції, банахова алгебра.

© Чернега І.В., 2009

встановлено аналоги формули Мартіна та поляризаційної формули для симетричних поліномів і описано деякі диференціювання на алгебрі симетричних поліномів.

Результати, пов'язані з симетричними поліномами та аналітичними відображеннями, мають застосування і в інших напрямках функціонального аналізу. Так, в роботі [2] Р. Аленкар, Р. Арон, П. Галіндо і А. Загороднюк, використовуючи результати, отримані в [9], дослідили спектр алгебри симетричних рівномірно неперервних аналітичних функцій на одиничній кулі простору ℓ_p. Також у статті [6] досліджується спектр алгебри симетричних аналітичних функцій на одиничній кулі простору $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, та у [5] — алгебри симетричних та субсиметричних аналітичних функцій на просторі ℓ_p, $1 \le p < \infty$.

Стаття містить широкий огляд з даної тематики та всі необхідні попередні відомості. Детальнішу інформацію про поліноми та аналітичні функції на банахових просторах можна знайти в монографіях [7], [8], [16].

1 Попередні відомості

Нехай X, Y — банахові простори над полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел. Відображення $P : X \to Y$ називається *n-однорідним поліномом*, якщо існує симетричне n-лінійне відображення $A : X^n \to Y$ таке, що для всіх $x \in X$, $P(x) = A(x, \ldots, x)$.

Поліном степеня n на X є скінченною сумою k-однорідних поліномів, $k = 0, \ldots, n$. Через $\mathcal{P}(^nX, Y)$ будемо позначати простір n-однорідних неперервних поліномів з X в Y і через $\mathcal{P}(X, Y)$ — простір всіх неперервних поліномів.

Добре відомо ([12], XI §52), що для $n < \infty$ кожен симетричний поліном на просторі $\mathbb{C}^n$ можна подати як поліном від елементарних симетричних поліномів $(R_i)_{i=1}^n$, $R_i(x) = \sum_{k_1 < \cdots < k_i} x_{k_1} \ldots x_{k_i}$ єдиним чином.

Як було відзначено, вивчення симетричних поліномів на гільбертових просторах та просторах ℓ_p і $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, розпочалося з роботи Немировського та Семенова [17]. Гонзалесом, Гонзало та Харамілло [9] ці результати узагальнено на дійсні банахові простори з деякою симетричною структурою, так звані переставно-інваріантні простори функцій, на вимірному просторі (I, μ) [13]. З точністю до деяких несуттєвих нормалізацій, вивчення переставно-інваріантних просторів функцій зводиться до наступних трьох випадків:

1. $I = \mathbb{N}$ і маса кожної точки — одиниця;
2. $I = [0, 1]$ зі звичайною мірою Лебега;
3. $I = [0, \infty)$ зі звичайною мірою Лебега.

Кажемо, що σ є автоморфізмом I, якщо σ є бієкцією I, σ і σ^{-1} є вимірними і зберігають міру. Позначимо через $\mathcal{G}(I)$ групу всіх автоморфізмів I. Якщо $X(I)$ є переставно-інваріантним простором функцій на I та $f \in X(I)$, то f є дійснозначною вимірною функцією на I та $f \circ \sigma \in X(I)$ для всіх $\sigma \in X(I)$. Також

$$\|f \circ \sigma\| = \|f\|$$

для всіх $\sigma \in \mathcal{G}(I)$ і всіх $f \in X(I)$. Ми завжди будемо розглядати простір $X(I)$, наділений цією нормою.

Слідом за [17] будемо казати, що поліном P на $X(I)$ є симетричним, якщо

$$P(f \circ \sigma) = P(f)$$

для всіх $\sigma \in \mathcal{G}(I)$ і всіх $f \in X(I)$.

Також, якщо $\mathcal{G}_0$ є підгрупою $\mathcal{G}(I)$, то поліном P називається $\mathcal{G}_0$-інваріантним, коли $P(f) = P(f \circ \sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathcal{G}_0$ і всіх $f \in X(I)$.

Нехай $X(I)$ — переставно-інваріантний простір функцій на I. Розглянемо множину

$$\mathcal{J}(X) = \{r \in \mathbb{N} : X(I) \subset L_r(I)\}.$$

Якщо $\mathcal{J}(X) \neq \emptyset$, то для кожного $r \in \mathcal{J}(X)$ можна розглянути поліноми

$$P_r(f) = \int_I f^r.$$

Ці поліноми називають елементарними симетричними поліномами на $X(I)$.

Симетричні поліноми на просторах з симетричним базисом .

Нехай $X = X(\mathbb{N})$ — банаховий простір з симетричним базисом $\{e_n\}$. Поліном P на X є симетричним, якщо для кожної перестановки $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{N})$

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\sigma(i)}\Big).$$

Розглянемо скінченну групу $\mathcal{G}_n(\mathbb{N})$ перестановок на множині $\{1, \dots, n\}$ і σ-скінченну групу $\mathcal{G}_0(\mathbb{N}) = \cup_n \mathcal{G}_n(\mathbb{N})$, як підгрупу $\mathcal{G}(\mathbb{N})$. За неперервністю, поліном f є симетричним тоді і тільки тоді, якщо він є $\mathcal{G}_0(\mathbb{N})$-інваріантним. Справді, якщо P є $\mathcal{G}_0(\mathbb{N})$-інваріантним і $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{N})$, то

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i e_{\sigma(i)}\Big) = P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\sigma(i)}\Big).$$

Кажемо, що послідовність $\{x_n\}$ має *нижню p-оцінку* для деякого $p \geq 1$, якщо існує константа $C > 0$ така, що

$$C\Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\Big)^{1/p} \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big\|$$

для всіх $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що $X \subset \ell_r$ тоді і тільки тоді, коли базис має нижню r-оцінку і тому, в цьому випадку, маємо:

$$\mathcal{J}(X) = \{r \in \mathbb{N} : \{e_n\} \text{ має нижню r-оцінку}\}.$$

Позначимо тепер $n_0(X) = \inf \mathcal{J}(X)$ (інфімум порожньої множини є ∞). Тоді елементарні симетричні поліноми мають вигляд:

$$P_r\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^r,$$

де $r \geq n_0(X)$.

Теорема 1. *[9] Нехай X — банахів простір з симетричним базисом e_n, P — симетричний поліном на X, позначимо $k = \deg P$ і $N = n_0(X)$. Тоді*

1. Якщо $k < N$, то $P = 0$.

2. Якщо $k \geq N$, тоді існує дійсний поліном q від декількох дійсних змінних такий, що

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = q\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^N, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k\Big)$$

для кожного $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X$.

Симетричні поліноми на $X[0,1]$ та $X[0,\infty)$.

Розглянемо $X[0,1]$ — сепарабельний переставно-інваріантний простір функцій на $[0,1]$. Зауважимо, що множина $\mathcal{J}(X)$ ніколи не є порожньою, оскільки завжди маємо, що $X[0,1] \subset L_1[0,1]$.

Введемо величину

$$n_\infty(X) = \sup\{r \in \mathbb{N} : X[0,1] \subset L_r[0,1]\}.$$

Отже, елементарні симетричні поліноми на $X[0,1]$ мають вигляд

$$P_r(f) = \int_0^1 f^r$$

для кожного цілого $r \leq n_\infty(X)$.

Теорема 2. *[9] Нехай $X[0,1]$ — сепарабельний переставно-інваріантний простір функцій на $[0,1]$ і розглянемо індекс $n_\infty(X)$, визначений вище. Нехай P — $\mathcal{G}_0[0,1]$-інваріантний поліном на $X[0,1]$ і нехай $k = \deg P$. Тоді існує дійсний поліном q декількох дійсних змінних такий, що*

$$P(f) = q\Big(\int_0^1 f, \dots, \int_0^1 f^m\Big)$$

для всіх $f \in X$, де $m = \min\{n_\infty(X), k\}$.

Для сепарабельного переставно-інваріантного простору функцій $X[0,\infty)$ ми розглянемо наступні асоційовані простори:

$$X[0,1] = \{f \cdot \chi_{[0,1]} : f \in X[0,\infty)\}$$

і

$$X(\mathbb{N}) = \overline{[\chi_{[n,n+1]}]}.$$

Зауважимо, що простір $X[0,1]$ є сепарабельним переставно-інваріантним простором функцій на $[0,1]$ і $X(\mathbb{N})$ є банаховим простором з симетричним базизом.

Для того, щоб описати множину $\mathcal{J}(X[0,\infty))$, нам потрібна наступна лема.

Лема 1.1. *[9] Нехай $X[0,\infty)$ — сепарабельний переставно-інваріантний простір функцій, $X[0,1]$ і $X(\mathbb{N})$ — визначені вище. Розглянемо $n_0 = n_0(X(\mathbb{N}))$ і $n_\infty = n_\infty(X[0,1])$. Тоді:*

1. Якщо $n_0 > n_\infty$, то $\mathcal{J}(X[0,\infty)) = \varnothing$.

2. Якщо $n_0 \leq n_\infty$, то $\mathcal{J}(X[0,\infty)) = \{n \in \mathbb{N} : n_0 \leq n \leq n_\infty\}$.

Теорема 3. *[9] Нехай $X[0,\infty)$ — сепарабельний переставно-інваріантний простір функцій, P — $\mathcal{G}_0$-інваріантний поліном на $X[0,\infty)$, $k = \deg P$, n_0 і n_∞ — визначені вище. Тоді*

1. Якщо або $n_0 > n_\infty$, або $k < n_0 \le \infty$, то $P = 0$.

2. Якщо $n_0 \le n_\infty$ і $n_0 \le k$, тоді існує дійсний поліном q декількох дійсних змінних, такий що

$$P(f) = q\Big(\int_0^\infty f^{n_0}, \dots, \int_0^\infty f^m\Big),$$

де $m = \min\{n_\infty, k\}$.

Субсиметричні поліноми

Нехай тепер X — банаховий простір з субсиметричним базисом $\{e_n\}$. Під субсиметричним базисом ми розуміємо безумовний базис на X, який є еквівалентним до кожної своєї підпослідовності.

n-однорідний поліном P на X називається *субсиметричним поліномом,* якщо для всіх $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, де $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, і всіх цілих n виконується наступне:

$$P\Big(\sum_{i=1}^n x_i e_i\Big) = P\Big(\sum_{i=1}^n x_i e_{k_i}\Big),$$

де $k_1 < \ldots < k_n$.

Зауважимо, що дане означення, яке було введене в роботі [10], співпадає з означенням стандартних поліномів, що були представлені Немировським і Семеновим в [17].

Позначимо через $n_0(X) = \min \mathcal{J}(X)$. Має місце наступна теорема.

Теорема 4. *[10] Нехай X — банахів простір з субсиметричним базисом e_n і $N = n_0(X)$.*

Якщо $n \ge N$, тоді кожен n-однорідний субсиметричний поліном може бути представлений як лінійна комбінація елементарних n-однорідних субсиметричних поліномів

$$P_{i_1,\dots,i_s}\Big(\sum_{n=1}^\infty x_n e_n\Big) = \sum_{n_1<\cdots<n_s} x_{n_1}^{i_1} \cdots x_{n_s}^{i_s}, \qquad (1)$$

де $i_1 + \cdots + i_s = n$ і кожне $i_j \ge N$.

Якщо $n < N$, тоді на X не існує нетривіальних n-однорідних субсиметричних поліномів.

2 Оператор зсуву у просторі симетричних аналітичних функцій на ℓ_p

У даному розділі наведені результати, що стосуються симетричних поліномів на просторі ℓ_p, які отримані за допомогою введеного в роботі [1] оператора симетричного зсуву.

Легко бачити, що для симетричної функції $f(x)$ на ℓ_p функція $f(x+y)$ для деякого фіксованого $y \in \ell_p$ не є, взагалі кажучи, симетричною, тобто простір симетричних функцій не є інваріантним відносно звичайного оператора зсуву $f(x) \mapsto f(x+y)$. У [1] запропоновано інший зсув на ℓ_p, який зберігає простір симетричних аналітичних функцій.

Нехай $x, y \in \ell_p$, $x = (x_1, x_2 \ldots)$ і $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Визначимо симетричний зсув $x \bullet y \in \ell_p$ формулою

$$x \bullet y = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots).$$

Відзначимо основні властивості симетричного зсуву.

1. Якщо $x = \sigma_1(u)$ і $y = \sigma_2(v)$ для деяких підстановок σ_1, σ_2, то $x \bullet y = \sigma(u \bullet v)$ для деякої підстановки σ на $\mathbb{N}$.
2. $\|x \bullet y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$.
3. $F_n(x \bullet y) = F_n(x) + F_n(y)$ для довільного натурального $n \ge p$, де $\{F_k\}$ є алгебраїчним базисом в просторі симетричних поліномів на ℓ_p, $F_k(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i^k$.

Позначимо через T_y^s оператор симетричного зсуву $f(x) \mapsto f(x \bullet y)$, через $H_b(\ell_p)$ будемо позначати алгебру всіх цілих функцій обмеженого типу на ℓ_p (тобто цілих функцій, які є обмеженими на обмежених множинах), через $H_{bs}(\ell_p)$ — алгебру всіх симетричних цілих функцій обмеженого типу на ℓ_p.

Твердження 2.1. *T_y^s є неперервним гомоморфізмом алгебри $H_{bs}(\ell_p)$ в себе.*

Доведення. Спочатку покажемо, що якщо $f(x) \in H_{bs}(\ell_p)$, то і $f(x \bullet y) \in H_{bs}(\ell_p)$ для кожного фіксованого $y \in \ell_p$. Дійсно, симетричний зсув $x \bullet y$ можемо записати у вигляді $x \bullet y = x \bullet 0 + 0 \bullet y$. Відображення $x \mapsto x \bullet 0$ є лінійною сюр'єкцією на підпростір Z простору ℓ_p, який є замкненою лінійною оболонкою $\{e_1, e_3, \ldots, e_{2n+1}, \ldots\}$. Згідно з [3], $f(x+y) \in H_b(\ell_p)$ для кожного фіксованого y, і тому $f(x + 0 \bullet y) \in H_b(\ell_p)$ для кожного фіксованого y. Зокрема, звуження $f(x + 0 \bullet y)$ на Z належить до $H_b(Z)$. Таким чином, $f(x \bullet y) = f(x \bullet 0 + 0 \bullet y) \in H_b(\ell_p)$ для кожного y. З іншого боку, очевидно, що $f(x \bullet y)$ — симетрична функція, отже, $f(x \bullet y)$ належить простору $H_{bs}(\ell_p)$.

Нехай $f(x), g(x) \in H_{bs}(\ell_p)$. Оператор T_y^s є лінійним і мультиплікативним, оскільки

$$T_y^s(f(x) + g(x)) = f(x \bullet y) + g(x \bullet y) = T_y^s(f(x)) + T_y^s(g(x)),$$

$$T_y^s(f(x)g(x)) = f(x \bullet y)g(x \bullet y) = T_y^s(f(x))T_y^s(g(x)).$$

Нехай $x, y \in \ell_p$ і $\|x\| \le \|y\| \le r$. Тоді $\|x \bullet y\| \le 2r$ і

$$|T_y^s f(x)| \le \sup_{\|z\| \le 2r} |f(z)| = \|f\|_{2r}.$$

Отже, T_y^s є неперервним оператором. □

Нехай

$$x^{\bullet m} := \underbrace{x \bullet \cdots \bullet x}_{m} \quad \text{і} \quad \mathop{\bullet}_{i=1}^{m} x_i := x_1 \bullet \cdots \bullet x_m.$$

З властивості 3 випливає, що $F_k(x^{\bullet m}) = mF_k(x)$ і $F_k\left(\mathop{\bullet}\limits_{i=1}^{m} x_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} F_k(x_i)$ для довільного натурального m і $k \geq p$.

Зауважимо, що в означенні симетричного зсуву суттєвим є те, що простір нескінченновимірний. Надалі ми завжди вважатимемо, що симетричні поліноми визначені на нескінченновимірному ℓ_p.

2.1 Аналог формули Мартіна для симетричних поліномів.

Нехай $P(x) = P_n(x) + \cdots + P_0$ — розклад деякого полінома P на однорідні доданки. Нагадаймо, що згідно з формулою Мартіна [14], для будь-яких попарно різних чисел $b_0, \ldots, b_n$ існує квадратна невироджена матриця $A(n, \overrightarrow{b})$, $(n+1)\times(n+1)$, яка залежить тільки від $\overrightarrow{b} = (b_0, \ldots, b_n)$ така, що

$$\begin{pmatrix} P_n(x) \\ \vdots \\ P_0 \end{pmatrix} = A(n, \overrightarrow{b}) \begin{pmatrix} P(b_n x) \\ \vdots \\ P(b_0 x) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Таким чином, за допомогою формули Мартіна можна обчислити однорідну компоненту P_k, $k = 0, \ldots, n$, довільного неоднорідного полінома P степеня n.

Нехай тепер P — симетричний поліном степеня $n \geq p$ на ℓ_p. Як було зауважено вище, існує поліном $Q(u_{\lceil p\rceil}, \ldots, u_n)$ від $n - \lceil p\rceil + 1$ змінних, такий що

$$P(x) = Q(F_{\lceil p\rceil}(x), \ldots, F_n(x)),$$

де $\lceil p\rceil$ — найменше ціле число, яке є більшим або дорівнює p.

Скажемо, що симетричний поліном P є цілком однорідним поліномом степеня (n, m), якщо P — n-однорідний і відповідний йому поліном Q — m-однорідний. Наприклад, $F_1F_3 + F_2^2$ буде цілком однорідним поліномом степеня $(4, 2)$, а $F_1^2 + F_2$ — однорідним степеня 2, але не цілком однорідним. Очевидно, що кожен симетричний поліном можна подати (єдиним чином) у вигляді скінченної суми цілком однорідних. У [1] отримано спосіб знаходження такого розкладу, використовуючи симетричний зсув та формулу Мартіна.

Поліном Q, взагалі кажучи, неоднорідний і $\deg Q \leq n$. Нехай $Q = Q_n + \cdots + Q_0$ — розклад Q на однорідні доданки. Візьмемо довільний набір попарно різних натуральних чисел $\overrightarrow{m} = (m_0, \ldots, m_n)$ і запишемо формулу (2) для Q. Маємо:

$$\begin{pmatrix} Q_n(u) \\ \vdots \\ Q_0 \end{pmatrix} = A(n, \overrightarrow{m}) \begin{pmatrix} Q(m_n u) \\ \vdots \\ Q(m_0 u) \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{pmatrix} Q_n(F_{\lceil p\rceil}(x), \ldots, F_n(x)) \\ \vdots \\ Q_0 \end{pmatrix} =$$

$$A(n, \overrightarrow{m}) \begin{pmatrix} Q(m_n F_{\lceil p\rceil}(x), \ldots, m_n F_n(x)) \\ \vdots \\ Q(m_0 F_{\lceil p\rceil}(x), \ldots, m_0 F_n(x)) \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$P(x^{\bullet m_k}) = Q(m_k F_{\lceil p\rceil}(x), \ldots, m_k F_n(x)),$$

то, згідно з (2),

$$\begin{pmatrix} Q_n(F_{\lceil p\rceil}(x), \ldots, F_n(x)) \\ \vdots \\ Q_0 \end{pmatrix} = A(n, \overrightarrow{m}) \begin{pmatrix} P(x^{\bullet m_n}) \\ \vdots \\ P(x^{\bullet m_0}) \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Застосуємо операцію спряження до рівності (2) для випадку простору ℓ_p, отримаємо:

$$(P_n(x), \ldots, P_0(x)) = (P(b_n x), \ldots, P(b_0 x))A^*(n, \overrightarrow{b}).$$

Очевидно, що для довільного $0 \leq k \leq n$ має місце наступна рівність:

$$(P_n(x^{\bullet m_k}), \ldots, P_0(x^{\bullet m_k})) = (P(b_n x^{\bullet m_k}), \ldots, P(b_0 x^{\bullet m_k}))A^*(n, \overrightarrow{b}),$$

або ж

$$\begin{pmatrix} P_n(x^{\bullet m_n}) & \cdots & P_0(x^{\bullet m_n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_n(x^{\bullet m_0}) & \cdots & P_0(x^{\bullet m_0}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} P(b_n x^{\bullet m_n}) & \cdots & P(b_0 x^{\bullet m_n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P(b_n x^{\bullet m_0}) & \cdots & P(b_0 x^{\bullet m_0}) \end{pmatrix} A^*(n, \overrightarrow{b}). \qquad (4)$$

Очевидно, що якщо P — n-однорідний поліном, то Q_k — (n, k)-цілком однорідний поліном. В загальному випадку, нехай $P = \sum\limits_{i,j=0}^{n} Q(i, j)$ — розклад симетричного полінома P на цілком однорідні доданки, де $Q(i, j)$ — деякі (i, j)-цілком однорідні поліноми. Зауважимо, що $Q(i, j) = 0$ при $i < j$. Домножимо рівність (4) на матрицю $A(n, \overrightarrow{m})$ зліва і, комбінуючи (3) і (4), отримуємо наступну теорему.

Теорема 5. *Для довільного набору попарно різних дійсних чисел $\overrightarrow{b} = (b_0, \dots b_n)$ та попарно різних натуральних чисел $\overrightarrow{m} = (m_0, \dots, m_n)$ існують невироджені матриці $A(n, \overrightarrow{b})$ і $A(n, \overrightarrow{m})$ такі, що для довільного симетричного полінома P степеня n*

$$\begin{pmatrix} Q(n,n) & \cdots & Q(0,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Q(n,0) & \cdots & Q(0,0) \end{pmatrix} =$$

$$A(n, \overrightarrow{m}) \begin{pmatrix} P(b_n x^{\bullet m_n}) & \cdots & P(b_0 x^{\bullet m_n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P(b_n x^{\bullet m_0}) & \cdots & P(b_0 x^{\bullet m_0}) \end{pmatrix} A^*(n, \overrightarrow{b}).$$

2.2 Аналог поляризаційної формули для симетричних поліномів.

В даному підрозділі доведено аналог поляризаційної формули для симетричних поліномів. Нагадаємо, що поляризаційна формула є відомим класичним результатом (див., напр. [14], [15]), дозволяє відновити n-лінійну симетричну форму A за n-однорідним поліномом P і має вигляд:

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n P\Big(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i x_j \Big). \tag{5}$$

Припустимо, що P — симетричний поліном степеня $n \geq p$ на ℓ_p, $P(x) = Q(F_{\lceil p \rceil}(x), \dots, F_n(x))$ такий, що Q — n-однорідний поліном. Нехай $\widetilde{Q}$ — симетрична n-лінійна форма, що породжує n-однорідний поліном Q, тобто $Q(t) = \widetilde{Q}(\underbrace{t, \dots, t}_{n})$. Виведемо формулу, яка відновлює n-лінійну форму $\widetilde{Q}$ за поліномом P.

Для довільного номера k позначимо через $\alpha_{0,k}, \dots, \alpha_{k-1,k}$ комплексні корені k-ого степеня з 1. Тобто $\alpha_{m,k} = e^{2mi\pi/k}$. Наступна лема, мабуть, добре відома.

Лема 2.1. *Для будь-якого натурального n*

$$\sum_{m=0}^{k-1} \alpha_{m,k}^n = \begin{cases} k & \text{якщо } n \equiv 0 \mod k, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Доведення. Оскільки $\alpha_{m,k}^n = \alpha_{m,k}^{n \bmod k}$, то достатньо довести лему для випадку $n < k$. З теореми Вієта випливає, що однорідні симетричні поліноми степеня $0 < n < k$ від коренів многочлена $x^k = 1$ дорівнюють нулю. Зокрема, $\sum_{m=0}^{k-1} \alpha_{m,k}^n = 0$ при $n < k$. □

Лема 2.2. *Для кожного натурального $n \geq \lceil p \rceil$ і скінченного набору векторів $x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n \in \ell_p$ існує елемент $\gamma_n(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n) \in \ell_p$ такий, що*

$$F_k(\gamma_n(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n)) = F_k(x_k)$$

для довільного $\lceil p \rceil \leq k \leq n$.

Доведення. Позначимо

$$\beta_n(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n) := \mathop{\bullet}_{j=\lceil p \rceil}^{n} \mathop{\bullet}_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_{i,j}}{\sqrt[j]{j}} x_j.$$

Для довільного натурального k позначимо через $J(k)$ множину дільників числа k. Враховуючи лему 2.1 і властивість 3 симетричного зсуву, маємо:

$$F_k(\beta_n(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n)) = \sum_{j \in J(k)} \frac{j}{j^{k/j}} F_k(x_j).$$

Зокрема, $F_{\lceil p \rceil}(\beta_n(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n)) = F_{\lceil p \rceil}(x_{\lceil p \rceil})$. Припустимо, що для деякого $l < n$ ми знайшли елемент $\beta_n^l(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n) \in \ell_p$ такий, що

$$F_k(\beta_n^l(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n)) = F_k(x_k)$$

при $k \leq l$, і

$$F_k(\beta_n^l(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n)) = \sum_{j \leq k} c_j F_k(x_j)$$

при $l < k \leq n$, де c_j — деякі константи і $c_k = 1$. Покладемо

$$\beta_n^{l+1}(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n) := \beta_n^l(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n) \bullet$$

$$\bullet \Big(\mathop{\bullet}_{i=\lceil p \rceil}^{l} \beta_n(\underbrace{0, \dots, 0}_{l}, (-1)^{1/l+1} c_i x_i, 0, \dots, 0) \Big).$$

Тоді

$$F_k(\beta_n^{l+1}(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n)) = F_k(x_k)$$

при $k \leq l + 1$ і

$$F_k(\beta_n^{l+1}(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n)) = \sum_{j \leq k} c'_j F_k(x_j)$$

при $l + 1 < k \leq n$ для деяких констант c'_j і $c'_k = 1$. Залишилось покласти $\gamma_n(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n) = \beta_n^n(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n)$, а $\gamma_n(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n)$ — шуканий елемент. □

Наслідок 2.1. *Нехай P — симетричний поліном степеня $n \geq p$ на ℓ_p. Тоді*

$$P(\gamma_n(x_{\lceil p \rceil}, \dots, x_n)) = Q(F_{\lceil p \rceil}(x_{\lceil p \rceil}), \dots, F_n(x_n)).$$

Нехай $e_1, \dots, e_n$ — стандартний базис в n-вимірному просторі. Перепозначимо його для нашого випадку через $e_{\lceil p \rceil}, \dots, e_n$. Ми можемо записати

$$P(x) = Q(F_{\lceil p \rceil}(x), \dots, F_n(x)) = Q\Big(\sum_{k=\lceil p \rceil}^{n} F_k(x) e_k \Big).$$

Теорема 6. *Нехай P — симетричний поліном на ℓ_p такий, що відповідний поліном Q — n-однорідний. Тоді n-лінійна симетрична форма $\widetilde{Q}$ має вигляд:*

$$\widetilde{Q}\Big(\sum_{k=\lceil p \rceil}^{n} F_k(x_{\lceil p \rceil}) e_k, \dots, \sum_{k=\lceil p \rceil}^{n} F_k(x_n) e_k \Big) =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_{\lceil p \rceil} \dots \varepsilon_n P\Big(\mathop{\bullet}_{i=\lceil p \rceil}^{n} \gamma_n(\varepsilon_i x_i, \dots, \varepsilon_i x_i) \Big).$$

Доведення. Згідно з наслідком 2.1,

$$P\Big(\mathop{\bullet}_{i=\lceil p\rceil}^{n}\gamma_n(\varepsilon_i x_i,\ldots,\varepsilon_i x_i)\Big)=$$

$$Q\Big(F_{\lceil p\rceil}\Big(\mathop{\bullet}_{i=\lceil p\rceil}^{n}\gamma_n(\varepsilon_i x_i,\ldots,\varepsilon_i x_i)\Big),\ldots,F_n\Big(\mathop{\bullet}_{i=\lceil p\rceil}^{n}\gamma_n(\varepsilon_i x_i,\ldots,\varepsilon_i x_i)\Big)\Big)=$$

$$Q\Big(\sum_{i=\lceil p\rceil}^{n}F_{\lceil p\rceil}(\gamma_n(\varepsilon_i x_i,\ldots,\varepsilon_i x_i)),\ldots,\sum_{i=\lceil p\rceil}^{n}F_n(\gamma_n(\varepsilon_i x_i,\ldots,\varepsilon_i x_i))\Big)=$$

$$Q\Big(\sum_{i=\lceil p\rceil}^{n}F_{\lceil p\rceil}(\varepsilon_i x_i),\ldots,\sum_{i=\lceil p\rceil}^{n}F_n(\varepsilon_i x_i)\Big)=$$

$$Q\Big(\sum_{i=\lceil p\rceil}^{n}\varepsilon_i\Big(F_{\lceil p\rceil}(x_i),\ldots,F_n(x_i)\Big)\Big)=Q\Big(\sum_{i=\lceil p\rceil}^{n}\varepsilon_i\Big(\sum_{k=\lceil p\rceil}^{n}F_k(x_i)e_k\Big)\Big).$$

Далі, застосовуємо поляризаційну формулу (5), взявши замість P поліном Q, а замість x_i — вектор $\sum\limits_{k=\lceil p\rceil}^{n}F_k(x_i)e_k$. □

2.3 Диференціювання в алгебрі симетричних поліномів.

Нагадаєм, що лінійний оператор D, визначений на алгебрі, називається диференціюванням, якщо для нього виконується правило Лейбніца, тобто $D(fg)=D(f)g+fD(g)$ для довільних f і g з даної алгебри.

Нехай $h\in\ell_p$, $m\in\mathbb{N}$, $\lceil p\rceil\le m\le n$ і P — симетричний поліном степеня $n\ge p$ на ℓ_p. Визначимо

$$D_mP(x)[h]:=\lim_{\lambda\to0}\frac{P\Big(x\bullet\Big(\mathop{\bullet}\limits_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda}{m^{1/m}}\alpha_{k,m}h\Big)\Big)-P(x)}{\lambda^m}.$$

Теорема 7. *Оператор $D_mP(x)[h]$ є диференціюванням на алгебрі симетричних поліномів. Якщо $P(x)=Q(F_{\lceil p\rceil}(x),\ldots,F_n(x))$, то*

$$D_mP(x)[h]=\frac{\partial Q}{\partial u_m}\Big(F_{\lceil p\rceil}(x),\ldots,F_n(x)\Big)F_m(h),\tag{6}$$

де $\frac{\partial Q}{\partial u_m}$ — диференціювання по u_m полінома $Q(u_{\lceil p\rceil},\ldots,u_n)$.

Доведення. Оскільки відображення $P\mapsto Q$ є гомоморфізм алгебри симетричних поліномів, породжених $F_{\lceil p\rceil},\ldots,F_n$, в алгебру поліномів від $n-\lceil p\rceil+1$ змінних, і $\frac{\partial Q}{\partial u_m}$ — оператор диференціювання на алгебрі поліномів від $n-\lceil p\rceil+1$ змінних, то достатньо перевірити формулу (6). Використовуючи властивості симетричного зсуву і означення D_m, маємо:

$D_mP(x)[h]=$

$$\lim_{\lambda\to0}\Bigg[\frac{Q\Big(F_{\lceil p\rceil}\Big(x\bullet\Big(\mathop{\bullet}\limits_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda}{m^{1/m}}\alpha_{k,m}h\Big)\Big),\ldots,F_n\Big(x\bullet\Big(\mathop{\bullet}\limits_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda}{m^{1/m}}\alpha_{k,m}h\Big)\Big)\Big)}{\lambda^m}-$$

$$\frac{Q(F_{\lceil p\rceil}(x),\ldots,F_n(x))}{\lambda^m}\Bigg]=$$

$$\lim_{\lambda\to0}\Bigg[\frac{Q\Big(F_{\lceil p\rceil}(x)+\sum_{k=0}^{m-1}F_{\lceil p\rceil}\Big(\frac{\lambda}{m^{1/m}}\alpha_{k,m}h\Big),\ldots,F_n(x)+}{}$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{m-1}F_n\Big(\frac{\lambda}{m^{1/m}}\alpha_{k,m}h\Big)\Big)}{\lambda^m}-\frac{Q(F_{\lceil p\rceil}(x),\ldots,F_n(x))}{\lambda^m}\Bigg]=$$

$$\lim_{\lambda\to0}\Bigg[\frac{Q(F_{\lceil p\rceil}(x),\ldots,F_{m-1}(x),F_m(x)+\mu_m\lambda^mF_m(h),\ldots,F_n(x)+}{}$$

$$\frac{\mu_n\lambda^nm^{\frac{m-n}{m}}F_n(h))}{\lambda^m}-\frac{Q(F_{\lceil p\rceil}(x),\ldots,F_n(x))}{\lambda^m}\Bigg],$$

де $\mu_k=\begin{cases}1, & \text{якщо } k\equiv0 \mod m,\\ 0 & \text{в протилежному випадку.}\end{cases}$

Якщо позначити $u_k=F_k(x)$, $a_k=F_k(h)$, $t=\lambda^m$, отримаємо:

$D_mP(x)[h]=$

$$\lim_{t\to0}\Bigg[\frac{Q(u_{\lceil p\rceil},\ldots,u_{m-1},u_m+\mu_mta_m,u_{m+1}+\mu_{m+1}t^{r_{m+1}}a_{m+1},\ldots,u_n+}{}$$

$$\frac{\mu_nt^{r_n}a_n)}{t}-\frac{Q(u_{\lceil p\rceil},\ldots,u_n)}{t}\Bigg],$$

де $r_{m+1},\ldots,r_n$ — деякі числа, більші за одиницю. Тому

$D_mP(x)[h]=$

$$\lim_{t\to0}\frac{Q(u_{\lceil p\rceil},\ldots,u_{m-1},u_m+ta,u_{m+1},\ldots,u_n)}{t}-\frac{Q(u_{\lceil p\rceil},\ldots,u_n)}{t}=$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_m}(u_{\lceil p\rceil},\ldots,u_n)a=\frac{\partial Q}{\partial u_m}\Big(F_{\lceil p\rceil}(x),\ldots,F_n(x)\Big)F_m(h).$$

□

3 Оператори симетризації. Множини максимальних ідеалів

В цьому розділі ми застосуємо деякі властивості симетричних та субсиметричних функцій, а також властивості оператора симетричного зсуву для дослідження спектру алгебри симетричних та субсиметричних цілих функцій обмеженого типу на просторі ℓ_p.

Введемо деякі необхідні нам поняття. Нехай X,Y — банахові алгебри. Відображення $F:X\to Y$ називається *гомоморфізмом* алгебри X в Y, якщо F — мультиплікативний лінійний оператор.

Нехай X — комутативна банахова алгебра. Підмножина $I\subset X$ називається *ідеалом*, якщо I є векторним підпростором X і $xy\in I$ для довільних $x\in X$, $y\in I$. Ідеал $I\neq X$

називається *власним ідеалом*. Власний ідеал, який не міститься в жодному більшому власному ідеалі, називається *максимальним ідеалом*.

Для банахової алгебри X через $M(X)$ будемо позначати множину всіх комплексних гомоморфізмів. Множина $M(X)$ називається *спектром* алгебри X. Комплексні гомоморфізми також називають мультиплікативними лінійними функціоналами або характерами алгебри X.

У випадку, коли X — комутативна банахова алгебра, існує взаємнооднозначна відповідність між множиною комплексних гомоморфізмів і множиною максимальних ідеалів алгебри X.

3.1 Звуження характерів алгебри $H_b(\ell_p)$ на $H_{bs}(\ell_p)$

Як і раніше, через $H_b(\ell_p)$ будемо позначати алгебру всіх цілих функцій обмеженого типу на ℓ_p зі спектром $M_b(\ell_p)$, через $H_{bs}(\ell_p)$ — алгебру всіх симетричних цілих функцій обмеженого типу на ℓ_p зі спектром $M_{bs}(\ell_p)$.

Оскільки $H_{bs}(\ell_p)$ є (замкненим) підпростором в $H_b(\ell_p)$, то звуження φ^s кожного характеру $\varphi \in M_b$ на простір $H_{bs}(\ell_p)$ є елементом множини M_{bs}. При цьому $\varphi^s = \psi^s$ для $\varphi, \psi \in M_b$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi(f) = \psi(f)$ для всіх $f \in H_{bs}(\ell_p)$.

Нагадаємо, що у роботі [18] описано множину максимальних ідеалів $M_b(X)$ алгебри $H_b(X)$ для довільного банахового простору X наступним чином:

Теорема 8. *Існує послідовність спряжених банахових просторів $(E_k)_{k=1}^{\infty}$, $E_1 = X''$, і вкладень $\delta^{(k)} : E_k \to M_b(X)$ таких, що кожен характер $\varphi \in M_b(X)$ подається у вигляді*

$$\varphi = \mathop{\circledast}_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)}(u_k),$$

де $u_k \in E_k$.

Простори E_k мають таку властивість, що $\widehat{P}(u_k) := \delta^{(k)}(u_k)(P) = 0$ для всіх однорідних поліномів P, $0 < \deg P < k$, і кожен E_k можна зобразити як замкнений підпростір у другому спряженому до проективного тензорного добутку: $E_k \subset (X \otimes_{s,\pi} \ldots \otimes_{s,\pi} X)''$. Іншими словами, $M_b(X)$ можна подати як простір послідовностей $\{\{u_k\} : u_k \in E_k\}$.

Операція згортки " $\circledast$ " для елементів з $M_b(X)$ визначена формулою

$$(\varphi \circledast \theta)(f) = \varphi(\theta(f(\cdot + x))), \tag{7}$$

де $f \in H_b(X)$.

Оскільки оператор зсуву $T_x : f \mapsto f(\cdot + x)$ не зберігає симетричності функції f, якщо $f \in H_{bs}(\ell_p)$, то формула (7) не є коректною для визначення згортки характерів алгебри симетричних аналітичних функцій $H_{bs}(\ell_p)$. Проте, для довільних $\varphi, \theta \in M_b$, $(\varphi \circledast \theta)^s \in M_{bs}$.

Таким чином, якщо $\theta \in M_{bs}$ і існує характер $\varphi \in M_b$ такий, що $\theta = \varphi^s$, то θ можна подати у вигляді

$$\theta = \Big(\mathop{\circledast}_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)}(u_k) \Big)^s \tag{8}$$

для деяких $u_k \in E_k(\ell_p)$. Питання про те, чи кожен характер $\theta \in M_{bs}$ можна зобразити формулою (8), зводиться до питання про те, чи кожен характер $\theta \in M_{bs}$ можна продовжити до деякого характера $\varphi \in M_b$.

Твердження 3.1. *Припустимо, що існує неперервний гомоморфізм $\Phi : H_b(\ell_p) \to H_{bs}(\ell_p)$, який є проектором на $H_{bs}(\ell_p)$, тобто $\Phi(f) = f$ для довільної функції $f \in H_{bs}(\ell_p)$. Тоді кожен характер $\theta \in M_{bs}$ продовжується до деякого характеру $\varphi \in M_b$ за формулою*

$$\varphi(f) = \theta(\Phi(f)),$$

де $f \in H_b(\ell_p)$ і оператор продовження $\theta \mapsto \varphi$ є неперервним відображенням з M_{bs} в M_b.

Доведення. Оскільки θ і Φ — неперервні гомоморфізми, то $\varphi = \theta \circ \Phi$ — неперервний гомоморфізм з $H_b(\ell_p)$ в $\mathbb{C}$, тобто $\varphi \in M_b$.

Нехай θ_α — збіжна до θ_0 напрямленість в M_{bs}, тобто $\theta_\alpha(f) \to \theta_0(f)$ для довільної функції $f \in H_{bs}(\ell_p)$. Якщо $g \in H_b(\ell_p)$, то $\Phi(g) \in H_{bs}(\ell_p)$ і $\varphi_\alpha(g) = \theta_\alpha(\Phi(g)) \to \theta_0(\Phi(g)) = \varphi_0(g)$ для довільної функції $g \in H_b(\ell_p)$. Отже, оператор $\theta \mapsto \varphi = \theta \circ \Phi$ є неперервним відображенням. □

Зауважимо, що замість алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на ℓ_p у твердженні 3.1 можна розглядати алгебру аналітичних функцій обмеженого типу на довільному банаховому просторі X, які є симетричними відносно дії деякої напівгрупи ізометричних операторів. Зокрема, твердження 3.1 буде правильним для алгебри субсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу на ℓ_p.

Маючи оператор симетричного зсуву $f \mapsto f(\cdot \bullet x)$, $f \in H_{bs}(\ell_p)$, який є гомоморфізмом алгебри $H_{bs}(\ell_p)$ в себе, ми можемо означити *симетричну згортку* елементів з M_{bs} наступним чином:

$$(\varphi \star \theta)(f) = \varphi(\theta(f(\cdot \bullet x))),$$

де $f \in H_{bs}(\ell_p)$, $\varphi, \theta \in M_{bs}$. Зауважимо, що в загальному випадку $\varphi \star \theta \neq \varphi \circledast \theta$ на $H_{bs}(\ell_p)$, навіть якщо φ і θ — функціонали значень в точках ℓ_p.

Твердження 3.2. *Операція симетричної згортки є асоціативною, комутативною і*

$$(\varphi \star \psi)(F_k) = \varphi(F_k) + \psi(F_k) \tag{9}$$

для довільних $\varphi, \psi \in M_{bs}$ і $k \geq \lceil p \rceil$.

Доведення. Перевіримо спочатку формулу (9). Маємо, що $(\varphi \star \psi)(F_k) = \varphi(\psi(F_k(y \bullet x))) = \varphi(\psi(F_k(y) + F_k(x))) = \varphi(\psi(F_k) + F_k(x)) = \psi(F_k) + \varphi(F_k)$. Очевидно, що з цієї формули випливає асоціативність і комутативність на F_k, $k \geq \lceil p \rceil$. Оскільки кожен симетричний поліном подається у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів F_k, $k \geq \lceil p \rceil$ і кожна функція з $H_{bs}(\ell_p)$ рівномірно наближається симетричними поліномами, то операція згортки є асоціативною і комутативною. □

Твердження 3.3. *Якщо існує гомоморфізм Φ (як у твердженні 3.1), то для довільних характерів φ і $\theta \in M_{bs}(\ell_p)$ існують характери ψ і $\xi \in M_b(\ell_p)$ такі, що $\varphi(f) = \psi(f)$, $\theta(f) = \xi(f)$ і*

$$(\varphi \star \theta)(f) = (\psi * \xi)(f)$$

для всіх функцій $f \in H_{bs}(\ell_p)$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли φ і θ — функціонали значення в точках простору ℓ_p, тобто $\varphi(f) = f(x)$ і $\theta(f) = f(y)$ для деяких $x, y \in \ell_p$. Покладемо $x' = x \bullet 0 = (x_1, 0, x_2, 0, \ldots)$ і $y' = 0 \bullet y = (0, y_1, 0, y_2, \ldots)$. Очевидно, що $f(x) = f(x')$, $f(y) = f(y')$ для всіх $f \in H_{bs}(\ell_p)$ і $x' + y' = x' \bullet y'$. Отже, $\delta^{(x')} * \delta^{(y')} = \delta^{(x')} \star \delta^{(y')}$. Покладемо $\psi = \delta^{(x')}$ і $\xi = \delta^{(y')}$. Зауважимо, що в цьому випадку твердження леми виконується без припущення про існування гомоморфізма Φ.

Розглянемо загальний випадок. Нехай φ, θ — довільні елементи з M_{bs}. В умовах леми існують продовження φ^0 і $\theta^0 \in M_b$. Згідно з [3], існують напрямленості (x_α) і (y_β) в ℓ_p такі, що $\varphi^0(P) = \lim_\alpha P(x_\alpha)$ і $\theta^0(P) = \lim_\beta P(x_\beta)$ для довільного полінома $P \in \mathcal{P}(\ell_p)$. Покладемо $x'_\alpha = x_\alpha \bullet 0$ і $y'_\beta = 0 \bullet y_\beta$. Тоді $\psi(P) = \lim_\alpha P(x'_\alpha)$ і $\xi(P) = \lim_\beta P(x'_\beta)$.

Зауважимо, шо границі існують для всіх поліномів $P \in \mathcal{P}(\ell_p)$. Справді, нехай $T_+(x) := x \bullet 0$. Легко бачити, що T_+ — лінійний неперервний оператор на ℓ_p. Тому, для кожного полінома $P \in \mathcal{P}(\ell_p)$ відображення $Q = P \circ T_+$ також є поліномом з $\mathcal{P}(\ell_p)$. Оскільки φ визначено для всіх поліномів, то $\psi(P) = \varphi(Q)$. Очевидно, що якщо P — симетричний, то $\psi(P) = \varphi(P)$, аналогічно $\xi(P) = \theta(P)$ і $(\varphi \star \theta)(P) = (\psi * \xi)(P)$. Оскільки це вірно для всіх симетричних поліномів, то ця рівність виконується для довільної функції $f \in H_{bs}(\ell_p)$. □

Існування гомоморфізму-проектора з $H_b(\ell_p)$ на $H_{bs}(\ell_p)$ та умови його неперервності досліджуються у наступних підрозділах.

3.2 Усереднююча симетризація

Для даної топологічної напівгрупи G позначимо через $\mathcal{B}(G)$ банахову алгебру всіх обмежених комплексних функцій на G і через $\mathcal{C}(G)$ підалгебру всіх неперервних функцій.

Через U позначимо C^*-підалгебру алгебри $\mathcal{B}(G)$. *Середнім значенням* U називається комплекснозначний лінійний функціонал φ на U, який є позитивним (тобто $\varphi(f) \geq 0$, коли $f \geq 0$ для $f \in \mathcal{B}(G)$) і $\varphi(1) = 1$. Середнє значення φ називається *інваріантним* (або *бі-інваріантним*), якщо воно є інваріантним відносно лівого і правого зсуву довільного елемента $g \in G$.

Топологічна напівгрупа G називається *аменабельною*, якщо існує інваріантне середнє $\mathcal{B}(G)$. Позначимо $\mathcal{G}_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$, де $\mathcal{G}_n$ — група підстановок на множині $\{1, \ldots, n\}$. Добре відомо (див. [4, ст. 89]), що $\mathcal{G}_0$ є аменабельною групою. Нехай λ — дискретна міра Хаара на $\mathcal{G}_0$, $\lambda(\sigma) = 1$ для довільного $\sigma \in \mathcal{G}_0$. Легко бачити, що для кожного $\sigma \in \mathcal{G}_0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(\sigma \mathcal{G}_n \bigtriangleup \mathcal{G}_n)}{\lambda \mathcal{G}_n} = 0,$$

де символ $\bigtriangleup$ позначає симетричну різницю множин. Тоді, згідно з [4, ст. 80, ст. 147], існує інваріантне середнє на $\mathcal{C}(\mathcal{G}_0)$, яке визначається наступним чином:

$$\varphi(g) = \lim_{\mathcal{U}} \lambda(\mathcal{G}_n)^{-1} \int_{\mathcal{G}_n} g(\sigma) d\lambda_\sigma = \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} g(\sigma), \tag{10}$$

де $\mathcal{U}$ — деякий вільний ультрафільтр на множині натуральних чисел.

Нехай тепер G — підгрупа ізометричних операторів на банаховому просторі X і V — G-симетрична підмножина X (нагадаємо, що підмножина $V \subset X$ називається *G-симетричною*, якщо вона є інваріантною відносно дії групи G на X). Припускаємо, що G наділена топологією поточкової збіжності на X. Для даної підалгебри A обмежених функцій на V, $f \in A$ і $x \in V$ визначаємо функцію на G, $(f, x) \in \mathcal{B}(G)$ наступним чином: $(f, x)(\sigma) = f(\sigma(x))$. Якщо f є неперервною, то (f, x) — неперервна також.

Твердження 3.4. *Нехай φ — неперервне інваріантне середнє $U \subset \mathcal{B}(G)$ і A — рівномірна алгебра неперервних функцій на V, таких що $(f, x) \in U$ для кожного $f \in A$ і $x \in V$. Тоді існує неперервний оператор симетризації $\mathcal{S}_\varphi$, який відображає A в рівномірну алгебру обмежених G-симетричних функцій на X.*

Доведення. Покладемо

$$\mathcal{S}_\varphi(f) = \varphi(f, x).$$

Оскільки φ є інваріантним середнім U і $(f, x) \in U$, то

$$\mathcal{S}_\varphi(f)(\sigma x) = \varphi(f, \sigma(x)) = \varphi(f, \sigma_0(x)) = \mathcal{S}_\varphi(f)(x),$$

де σ_0 є тотожнім на G. Таким чином, $\mathcal{S}_\varphi(f)$ є симетричним. Очевидно, що якщо $\|x\| \leq 1$, тоді $\|(f, x)\| \leq \|f\|$ і множина $\{(f, x) \colon \|f\| \leq 1 \text{ і } \|x\| \leq 1\}$ є підмножиною $\{(f, x) \colon \|(f, x)\| \leq 1\}$. Звідси

$$\|\mathcal{S}_\varphi\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|\varphi(f, \cdot)\| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|f\| \leq 1} |\varphi(f, x)| \leq \sup_{\|(f, x)\| \leq 1} |\varphi(f, x)| = \|\varphi\|.$$

□

Наслідок 3.1. *Нехай V — $\mathcal{G}_0$-симетрична підмножина ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Тоді існує неперервний лінійний оператор проекції $\mathcal{S}$ з алгебри $C_b(V)$ неперервних, обмежених на обмежених підмножинах функцій на V, в алгебру $\mathcal{B}_s(V)$ $\mathcal{G}_0$-симетричних обмежених функцій на V, такий що*

$$\mathcal{S}(f)(x) = \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} f(\sigma(x)) \tag{11}$$

і

$$\|\mathcal{S}(f)\|_V := \sup_{x \in V} |\mathcal{S}(f)(x)| \leq \|f\|_V.$$

Доведення. Нехай φ — інваріантне середнє на $\mathcal{G}_0$, що визначається формулою (10). Покладемо $\mathcal{S} := \mathcal{S}_\varphi(f)$. За твердженням 3.4, $\mathcal{S}$ є неперервним лінійним відображенням з $C_b(V)$ в $\mathcal{B}_s(V)$. Оскільки $\mathcal{S}(f) = f$ для довільного $f \in \mathcal{B}_s(V)$, то $\mathcal{S}$ є проектором. Формула (11) безпосередньо випливає з (10).

Оскільки множина V є симетричною, то $\|f(\sigma(\cdot))\|_V = \|f\|_V$ для кожного $\sigma \in \mathcal{G}_0$. Тому для кожного n

$$\left\| \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} f(\sigma(\cdot)) \right\|_V \leq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} \|f(\sigma(\cdot))\|_V = \|f\|_V.$$

□

Твердження 3.5. *Нехай V є $\mathcal{G}_0$-симетричною множиною на просторі ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Якщо функція f — рівномірно неперервна на V, тоді $\mathcal{S}(f)$ є рівномірно неперервною на V. Якщо множина V є відкритою і f — аналітична на V, тоді $\mathcal{S}(f)$ — аналітична на V.*

Доведення. Нехай дано $\varepsilon > 0$ і нехай $\delta > 0$ є таким, що якщо $\|x - y\| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Оскільки з того, що $\|x - y\| < \delta$ випливає, що $\|\sigma(x) - \sigma(y)\| < \delta$, то звідси маємо:

$$\left| \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} f(\sigma(x)) - \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} f(\sigma(y)) \right| < \varepsilon.$$

Відповідно, $|\mathcal{S}(f)(x) - \mathcal{S}(f)(y)| \leq \varepsilon$.

Для доведення останнього твердження достатньо показати, що якщо P є n-однорідним поліномом, то і $\mathcal{S}(P)$ є n-однорідним поліномом. А це, в свою чергу, випливає з лінійності відображення $\sigma\colon x \mapsto \sigma(x)$ для довільного $\sigma \in \mathcal{G}_0$. □

Наслідок 3.2. *Простір $H_{bs}(\ell_p)$ є доповнювальним замкненим підпростором в $H_b(\ell_p)$.*

Наступний приклад показує, що $\mathcal{S}$ не є гомоморфізмом.

Приклад 3.1. Нехай P і Q — два функціонали на ℓ_1, задані наступним чином:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i-1} \quad \text{і} \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i}.$$

Зауважимо, що

$$\mathcal{S}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\Big) = \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{n!}\Big(\sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} \sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(i)}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\Big(\sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} \sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(i)}\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

Оскільки $(P+Q)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ і Q є композицією P та оператора зсуву, то ми отримуємо:

$$\mathcal{S}(P)(x) = \mathcal{S}(Q)(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

Але

$$\mathcal{S}(P)\mathcal{S}(Q)(x) = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{\infty} x_i x_j \neq \mathcal{S}\Big(\sum_{i,j=1}^{\infty} x_{2i-1} x_{2j}\Big) = \mathcal{S}(PQ)(x),$$

оскільки $\mathcal{S}(P)\mathcal{S}(Q)(x)$ містить доданки $\frac{1}{4}x_i^2$, $i = 1, 2, \ldots$, а $\mathcal{S}(PQ)(x)$ не містить їх.

3.3 Симетризуючий гомоморфізм для субсиметричних поліномів

В [10] Р. Гонзало, використовуючи техніку розсіюючої моделі (spriding model), побудувала гомоморфізм з простору всіх неперервних поліномів $\mathcal{P}(X)$ на довільному банаховому просторі X з субсиметричним базисом на простір неперервних субсиметричних поліномів $\mathcal{P}_{s_{b_s}}(X)$, який ми позначимо $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}$.

Зокрема, нею доведено, що для заданого полінома P на ℓ_p існують нескінченна множина цілих індексів H і поліном P^* на ℓ_p, такі що:

$$P^*\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i e_i\Big) = \lim_{\substack{n_1 < \cdots < n_k \\ n_j \in H}} P\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i e_{n_i}\Big).$$

Зауважимо, що $\deg P^* \leq \deg P$.

Згідно з [8, ст. 122, 123], P^* можна описати наступним чином. Нехай $\mathcal{U}$ — вільний ультрафільтр на $\mathbb{N}$. Тоді

$$P^*\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i e_i\Big) = \lim_{\mathcal{U},1} \ldots \lim_{\mathcal{U},k} P\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i e_{n_i}\Big). \tag{12}$$

Формула (12) означає, що спочатку ми беремо границю по ультрафільтру $\mathcal{U}$ для індексу $k \rightsquigarrow n_k$ при базисному елементі e_k з координатою x_k. Цю границю позначаємо

$$\lim_{\mathcal{U},k} P(x_1 e_1 + \ldots + x_{k-1} e_{k-1} + x_n e_{n_k}).$$

Дана границя існує (оскільки P — обмежений). Далі ми беремо границю для індексу $k-1 \rightsquigarrow n_{k-1}$ при e_{k-1} і т. д.

Таким чином, P^* залежить тільки від P і ультрафільтра $\mathcal{U}$. Позначимо через $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}$ відображення $P \mapsto P^*$ для фіксованого вільного ультрафільтра $\mathcal{U}$. Легко бачити, що P^* є субсиметричним на ℓ_p. З (12) випливає, що $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}$ є гомоморфізм і що $\|P^*\| \leq \|P\|$.

Відзначимо, що в доведенні теореми 3.1 в [10] суттєвим є те, що відображення, яке поліному P ставить у відповідність поліном P^*, є гомоморфізмом.

Позначимо через $\mathfrak{G}$ напівгрупу, породжену ізометричними операторами β_i,

$$\beta_i\colon (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots).$$

Зауважимо, що функція — субсиметрична тоді і тільки тоді, коли вона є інваріантною відносно дії операторів β_i.

Наслідок 3.3. *Нехай V є $\mathfrak{G}$-симетричною областю ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Тоді гомоморфізм $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}$ може бути продовжений до неперевного гомоморфізму на довільній алгебрі $\mathcal{A}$ аналітичних функцій на V, де поліноми є щільними в її підалгебрі $\mathcal{A}_{s_{b_s}}$ субсиметричних функцій на V. Більше того, якщо функція f — неперервна на замиканні $\overline{V}$, то $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}(f)$ — неперервна на $\overline{V}$, і якщо функція f обмежена на деякій субсиметричній підмножині $V_0 \subset V$, то це ж справедливе для $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}(f)$.*

Будемо позначати це продовження тим самим символом $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}$.

Наслідок 3.4. *Кожен характер $\varphi \in M_{bs_{b_s}}(\ell_p)$ продовжується до деякого характеру $\psi \in M_b(\ell_p)$ за формулою:*

$$\psi(f) = \varphi(\mathfrak{S}_{s_{b_s}}(f)),$$

де $f \in H_b(\ell_p)$.

3.4 Симетризуючий гомоморфізм для симетричних поліномів

Позначимо через $\mathcal{P}_n(\ell_1)$ ($\mathcal{P}_{s,n}(\ell_1)$, $\mathcal{P}_{s_{b_s},n}(\ell_1)$) алгебру (симетричних, субсиметричних) поліномів на ℓ_1, породжену всіма (симетричними, субсиметричними) поліномами степеня $\leq n$. Також позначення $H_{b,n}(\ell_1)$, $H_{bs,n}(\ell_1)$, $H_{s_{b_s},n}(\ell_1)$, $M_{b,n}(\ell_1)$ $M_{bs,n}(\ell_1)$ і $M_{s_{b_s},n}(\ell_1)$ мають відповідний сенс.

Приклад 3.2. Розглянемо випадок $n = 2$. Оскільки $H_{bs,2}(\ell_1) = H_{s_{b_s},2}(\ell_1)$, то звуження $\mathfrak{S}_{s_{b_s},2}$ простору $\mathfrak{S}_{s_{b_s}}$ на простір $H_{b,2}(\ell_1)$ є проективним гомоморфізмом з $H_{b,2}(\ell_1)$ на $H_{bs,2}(\ell_1)$. Нехай $\Theta\colon H_{bs,2}(\ell_1) \to H_{bs,2}(\ell_1)$ — гомоморфізм, визначений на базисних функціях F_1, F_2 наступним чином: $\Theta(F_1) = F_2, \Theta(F_2) = F_1$. Згідно з [2], існує топологічний ізоморфізм між алгеброю $H_{bs,2}(\ell_1)$ і алгеброю цілих функцій двох змінних $H(\mathbb{C}^2)$, заданий так, що

$$H_{bs,2}(\ell_1) \ni u(F_1(x), F_2(x)) \leftrightarrow u(t_1, t_2) \in H(\mathbb{C}^2).$$

Очевидно, що Θ є неперервним. Тому $\Theta \circ \mathfrak{S}_{s_{b_s}}$ — неперервний гомоморфізм з $H_{s,2}(\ell_1)$ в себе з наступною "патологічною" властивістю: $\Theta \circ \mathfrak{S}_{s_{b_s}}(F_1) = F_2$ і $\Theta \circ \mathfrak{S}_{s_{b_s}}(F_2) = F_1$.

Нагадаємо, що в роботі [5] виписано у явному вигляді алгебраїчний базис для простору субсиметричних поліномів на просторі ℓ_1 для випадку $n = 3$. Зауважимо, що в загальному випадку для довільного n в [11] доведено існування алгебраїчного базису у просторі субсиметричних поліномів на просторі ℓ_p, який містить алгебраїчний базис симетричних поліномів.

Таким чином, використовуючи результати, одержані в [11], та продовжуючи ідею з [5], отримуємо наступне твердження.

Твердження 3.6. *Існує неперервний гомоморфізм $\mathfrak{S}_{s,n}$ з $\mathcal{P}_n(\ell_1)$ на $\mathcal{P}_{s,n}(\ell_1)$, такий що $\mathfrak{S}_{s,n}(P) = P$, якщо P є симетричним.*

Наслідок 3.5. *Існує неперервне вкладення множини $M_{bs,n}(\ell_1)$ в $M_{b,n}(\ell_1)$, яке задається формулою:*

$$M_{bs,n}(\ell_1) \ni \varphi \mapsto \varphi \circ \mathfrak{S}_{s,n} \in M_{b,n}(\ell_1).$$

Література

1. Чернега І.В. *Оператор зсуву у просторі симетричних аналітичних функцій на ℓ_1* // Мат. методи і фіз. мех. поля - 2006. - Т.49 №2. - С.52-57.
2. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Algebra of symmetric holomorphic functions on ℓ_p*, Bull. Lond. Math. Soc., **35** (2003), 55-64.
3. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W. *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. Reine Angew. Math., **415** (1991), 51-93.

4. Berglund J.F, Junghenn H.D, Milnes P. Analysis on Semigroups, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, New York, Toronto, 1989.
5. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra*, Preprint.
6. Chernega I.V., Zagorodnyuk A.V. *Application of generalized Rademacher functions to investigation of algebras of symmetric analytic functions on $L_p[0,1]$*, Matematychni Studii, **21**, 1 (2004), 64-71.
7. Dineen S. *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, Mathematics Studies, vol. 57, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1981.
8. Dineen S. Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1999.
9. Gonzalez M., Gonzalo R., Jaramillo J. *Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces*, Jour. London Math. Soc., **59** (1999), 681-697.
10. Gonzalo R., *Multilinear forms, subsymmetric polynomials, and spreading models on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 379-397.
11. Hájek P., *Polynomial algebras on classical Banach spaces*, Israel J. Math., **106** (1998), 209-220.
12. Kurosch A.G. Curso de Algebra Superior, Mir, Moscow, 1977.
13. Lindestrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces I. Sequence Spaces, Springer-Verlag, New York, 1977.
14. Martin R.S., *Contributions to the theory of functionals*, Ph.D. thesis, University of California, 1932.
15. Mazur S., Orlicz W. *Grundlegende eigenschaften der polynomischen operationen I, II*, Studia Math., **5** (1935), 50-68, 179-189.
16. Mujica J. Complex Analysis in Banach Spaces, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986.
17. Nemirovskii A.S., Semenov S.M. *On polynomial approximation of functions on Hilbert space*, Mat. USSR Sbornik, **21** (1973), 255-277.
18. Zagorodnyuk A. *Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 2559-2569.

Інститут прикладних проблем механіки та математики,

Львів, Україна.

Надійшло 25.11.2009

Chernega I.V. *Symmetric polynomials on Banach spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 214–233.

A survey of general results about symmetric polynomials on Banach spaces and rearrangement-invariant function spaces and some new results in this area are given. Some applications to Banach algebras are represented.

Чернега И.В. *Симметрические полиномы на банаховых пространствах* // *Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 214–233.

В работе сделан обзор основных результатов о симметрических полиномах на банаховых пространствах и перестановочно-инвариантных пространствах функций. Получены применения к банаховым алгебрам, а также доказаны некоторые новые результаты в этой области.

Науковий журнал

Карпатські Математичні Публікації

(свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 14703-3674Р)

Том 1, №2
2009

Відповідальний за випуск д.ф.-м.н. Загороднюк А.В.
Літературна редакція Лабачук О.В.
Комп'ютерна правка та макетування Максимів В.В.

Підписано до друку 28.12.2009 р. Формат $60 \times 84/_{8}$.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура Computer Modern
Умовн. друк. аркушів 15,5. Наклад 300 примірників. Замовлення 52

Друк: пп Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. 0342 58 04 32